第2章　複素函数

2.1　複素函数

2.1.1　定義

複素平面の部分集合 $A \subset \mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への写像 $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ を A 上の**複素函数**という。このとき、f の**共役** $\overline{f} : A \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\overline{f}(z) := \overline{f(z)}$ で定め、f の**実部** $\Re f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\Re f := \dfrac{f+\overline{f}}{2}$ で、f の **虚部** $\Im f : A \longrightarrow Cn$ を $\Im f := \dfrac{f+\overline{f}}{2i}$ で定める。

函数 $w = f(z)$ に対し、$z = x+yi$、$w = u+vi$（x、y、u、$v \in \mathbb{R}$）と考えると、$(x, y) \in \mathbb{R}$ の実関数 $u = \phi(x, y) := \Re f(z)$、$v = \psi(x, y) := \Im f(Z)$ が定まることと考えることもできる。

複素函数 f が A 上**有界**であるとは、

$$\exists M > 0 \quad \text{s.t.} \quad |f(x)| < M \text{ for } \forall z \in A$$

がなりたつこととする。

2.1.2　極限、連続

定義 2.1.1 $A \subset \mathbb{C}$ に対し、$z_0 \in \mathbb{C}$ が A の集積点とする。f が z_0 で**極限値** $\alpha \in \mathbb{C}$ を持つことを

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad |f(z) - \alpha| < \epsilon \text{ for } z \in (\Delta(z_0; \delta) \backslash \{z_0\}) \cap A.$$

で定義する。ただし、$\Delta(z_0; \delta)$ は、中心 z_0 、半径 δ の複素平面上の円板。

実函数の場合と同様に、次が成り立つ。

命題 2.1.2 $A \subset \mathbb{C}$、$f : A \longrightarrow \mathbb{C}$、$g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ を複素函数とする、このとき、 $\alpha = \lim_{z \to z_0} f(z)$、 $\beta = \lim_{z \to z_0} g(z)$ とすると、

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = \alpha \pm \beta, \qquad \lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = \alpha\beta, \qquad \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0).$$

極限より、連続性も定義される。

定義 2.1.3 $z_0 \in A$ で、$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$ がなりたつとき、$f(z)$ は z_0 で**連続**であるという。また、$f(z)$ が全ての $z_0 \in A$ で連続なとき、$f(z)$ は A で連続であるという。

定義より、f、g が $A \subset \mathbb{C}$ で連続であるとき、$\alpha f(z) + \beta g(z)$、$f(z)g(z)$ も連続である。また、さらに、$z_0 \in \mathbb{C}$ で、$g(z_0) \neq 0$ であるとき、$f(z)/g(z)$ は z_0 で連続。

問題: (1) f が $z_0 \in \mathbb{C}$ で連続であることと、$\Re f$、$\Im f$ が z_0 で連続であることは同値であることを示せ。

(2) f が z_0 で連続ならば、$|f(z)|$ も z_0 で連続であることを示せ。

> **定義 2.1.4** $A \subset \mathbb{C}$ の複素函数 f が A 上 **一様連続**であるとは、
>
> $$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{s.t. “}z, w \in A,\ |z - w| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - f(w)| < \epsilon\text{“}$$
>
> が成り立つことである。

> **定理 2.1.5** (i) コンパクト集合 $A \subset \mathbb{C}$ 上の連続函数 f は有界であり、その最大値は $\sup_{z \in A} |f(z)|$ である。
>
> (ii) コンパクト集合上の連続函数は一様連続。

（証明） f を A 上の連続函数とする。任意の $\epsilon > 0$ と、任意の点 $a \in A$ をとると、ある $\delta = \delta(a) > 0$ が存在して、

$$z \in \Delta(a; \delta(a)) \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - f(a)| < \varepsilon$$

がなりたつ。A がコンパクトだから、$\{\Delta(a; \delta(a)/2) \mid a \in A\}$ は A の開被覆だから、有限個の点、a_1、$\cdots$、$a_l \in A$ が存在して、

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{l} \Delta(a_j, \delta_j/2), \qquad \text{ただし} \quad \delta_j = \delta(a_j).$$

したがって、任意の $z \in A$ をとると、ある j があって、$z \in \Delta(a_j, \delta_j/2)$ となり、

$$|f(z)| = |f(z) - f(a_j) + f(a_j)| < \varepsilon + |f(a_j)| \leq \varepsilon + \max_{1 \leq j \leq l} |f(a_j)|$$

よって、f は A 上有界である。$M = \sup\ \{|f(z) \mid z \in A\} < +\infty$ とする。A の点列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $\lim_{n \to \infty} |f(z_n)| = M$ となるようにとる。A はコンパクトであるから部分列をとることにより、$\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $z_0 \in A$ に収束するとしてよい。f の連続性より、

$$|f(z_0)| = \lim_{n \to \infty} |f(z_n)| = M$$

よって、(1) が成立。

(2) $\delta_0 = \min_{1 \leq j \leq l} \delta_j$ とおく。z、$w \in A$ を $|z - w| < \delta_0/2$ と任意にとる。ある j があって $z \in \Delta(a_j; \delta_j/2)$。よって、$w \in \delta(a_j; \delta_j)$ となる。これから、

$$|f(z) - f(w)| \leq |f(z) - f(a_j)| + |f(w) - f(a_j)| < 2\varepsilon$$

となり、f は A 上一様収束。（証明終）

問題: (1) $f(z) = z^2$ は、領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\ \}$ で一様連続であることを示せ。

(2) $f(z) = 1/z$ は、領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\ \}$ で一様連続にならないことを示せ。

2.2 複素函数列

2.2.1 複素函数列

$A \in \mathbb{C}$ 上の複素函数の無限列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を A 上の**（複素）函数列**と呼ぶ。複素函数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が点 $z \in A$ で**収束**するとは $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ が収束することとする。また、$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が任意の $z \in A$ で収束するとき、$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は は A で収束す

るという。各 $z \in A$ に対し $f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ で定義された複素函数 f を、$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ の**極限函数**といい、

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n, \qquad \text{または} \qquad f_n \longrightarrow f_n(n \to \infty)$$

と書く。また、$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が f に**一様収束**するとは、

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \text{“} \, |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{for} \quad \forall n \geq n_0 \text{ and } \forall z \in A \, \text{''}$$

で定義する。

定理 2.2.1 (i) A 上の複素函数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が一様収束 $\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.“} \, |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon \quad \text{for } \forall n, m \geq n_0 \text{ and } \forall z \in A \text{ ”}$$

(ii) A 上の連続な複素函数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が A 上一様収束ならば、極限函数 $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ も A 上連続。

証明は練習問題とする。

問題: 上の命題を証明せよ。

A 上の複素函数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が **一様有界**であるとは、ある $M > 0$ が存在し、すべての $n \in \mathbb{N}$ と $z \in A$ に対し、$|f_n(z)| \leq M$ がなりたつことをいう。数列が有界ならば必ず収束する部分列を持つが、A 上の複素函数列は一様有界なら収束する部分列を持つとは限らない。極限函数が連続であるような、連続函数の列を定義するのに、次の言葉を用意する。

定義 2.2.2 $A \subset \mathbb{C}$ 上の複素函数からなる函数の $\mathcal{F}$ が**同程度連続** であるとは、

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{s.t. “} \, z, w \in A, \ |z - w| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - f(w)| < \epsilon \text{ “}$$

がなりたつことをいう。

定理 2.2.3 (Ascoli-Arzelá の定理) コンパクトな集合 $A \quad \subset \mathbb{C}$ 上の一様有界かつ同程度連続な複素函数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は A 上一様収束する部分列を持つ。

（証明） まず、次の補題を示す。

補題 2.2.4 A の点列からなる集合 $E = \{z_\nu \mid \nu = 1, 2, \cdots, \}$ で、E の閉包 $\overline{E}$ が A になるようなものが存在する。

（穂題の証明） A は有界な集合だから、

$$\exists M > 0, \quad \text{s.t. } |\Re z| < M, \ |\Im z| < M \quad \text{for } \forall z \in A$$

このとき、正方形

$$F_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |\Re z| < M, \ |\Im z| < M\}$$

をとる。次に、F_1 の各辺を２等分した４つの正方形を $F_{2,1}$、$F_{2,2}$、$F_{2,3}$、$F_{2,4}$ とする。同様に、F_1 の各辺を 2^n 等分した 4^{n-1} 個の正方形として $F_{n,j}$ （$j=1,\cdots,4^{n-1}$）が得られる。このとき、

$$A\subset\bigcup_{j=1}^{4^{n-1}}F_{n,j}=1$$

この、$F_{n,j}$ に対し、もし、$A\cap F_{n,j}\neq\phi$ ならば、その中の一点 $z_{n,j}\in A\cap F_{n,j}$ をとり、これらのなす有限集合を E_n とする。 $E:=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ とすれば、これが求める集合。（補題の証明終）

（定理の証明の続き） z_1 が、上の穂題の E に含まれているとすると、$f_n(z_1)_{n=0}^{\infty}$ は有界な数列であるから、収束する部分列 $\{f_{n(1)_\nu}(z)\}_{\nu=0}^{\infty}$ を持つ。同様に、$z_2\in E$ に対し、複素数列 $\{f_{n(1)_\nu}(z_2)\}_{\nu=0}^{\infty}$ は収束する部分列を持つ。これを $\{f_{n(2)_\nu}(z_2)\}_{\nu=0}^{\infty}$ とする。こうすると、函数列 $\{f_{n(2)_\nu}(z)\}_{\nu=0}^{\infty}$ は z_1、z_2 で収束する。これを繰り返すと、z_1、$\cdots$、z_k で収束するような函数列 $\{f_{n(k)_\nu}(z)\}_{\nu=0}^{\infty}$ が得られる。よって、$\{f_{n(\nu+1)_\nu}(z)\}_{\nu=0}^{\infty}$ は E 上収束する。簡単のため、$g_\nu:=f_{n(\nu+1)_\nu}(z)$ と書く。任意の $\varepsilon>0$ に対し、$\delta>0$ を

$$z,w\in A,\ |z-w|<\delta\quad\Longrightarrow\quad|g_n(z)-g_n(w)|<\varepsilon$$

を満たすようにとる。A はコンパクトだから、有限個の円盤 $\Delta(a_j;\delta)$ （$a_j\in A$、$j=1,\cdots l$）で覆われる。$\overline{E}=A$ であるから、各 j に対し、$z_{\nu(j)}\in\Delta(a_j;\delta)\cap E$ をとれる。このとき、

$$\exists\mu_0\in\mathbb{N}\quad\text{s.t. }|g_\mu(z_{\mu(j)})-g_\mu(z_{\mu(j)})|<\varepsilon\quad(1\leq j\leq l)$$

であることに注意する。

このとき、任意に $a\in A$ をとると、ある 適当な j に対し、$a\in\Delta(a_j;\delta)$ となる。よって、このとき、上で定めた μ_0 に対し、$\mu,\mu'>0$ ならば、

$$|g_\mu(a)-g_{\mu'}(a)|\leq|g_\mu(a)-g_\mu(z_{\nu(j)})|+|g_\mu(z_{\nu(j)})-g_{\mu'}(z_{\nu(j)})|+|g_{\mu'}(z_{\nu(j)})-g_\mu(a)|<3\varepsilon$$

よって、定理 2.2.1 (i) より、$\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ は一様収束。（証明終）

定義 2.2.5 (i) $D\in\mathbb{C}$ 上の複素函数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が、D の任意なコンパクト集合上、一様収束するとき、$\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ は**広義一様収束**するという。

(ii) $D\in\mathbb{C}$ 上の複素函数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が、D の任意なコンパクト集合上、一様有界のとき、$\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ は**広義一様有界**という。

(iii) $D\in\mathbb{C}$ 上の複素函数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が、D の任意なコンパクト集合上、同程度連続のとき、$\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ は**広義同程度連続**という。

定理 2.2.6 (i) D 上の複素函数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が広義一様収束する $\iff$

$$\forall a\in D,\quad\exists r>0,\quad\text{s.t. “}\ \overline{\Delta(a;r)}\subset D\quad\text{かつ}\quad\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\text{ が }\overline{\Delta(a;r)}\text{ 上一様収束 “.}$$

(ii) D 上広義一様収束する連続複素函数列の極限関数は連続函数。

（証明） (i) $\rightarrow$ は明らかなので、$\leftarrow$ を示す。任意の $a\in D$ に対し、$\overline{\Delta(a;r)}\subset D$ かつ $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\overline{\Delta(a;r)}\subset D$ 上収束するような $r>0$ があるとする。K を D の任意のコンパクト部分集合とする。K の各点 a に対し、このような円盤の半径がある。これを r_a とおくと、$\{\Delta(a;r_a)\}_{a\in K}$ は K の開被覆であるから、有限個の a_1、$\cdots$、$a_l\in K$ が存在し、

$K \in \bigcup_{j=1}^{r} \Delta(a_j; r_{a_j})$ となる。$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は、$\bigcup_{j=1}^{r} \Delta(a_j; r_{a_j})$ 上一様収束しているので、K 上一様収束する。
(ii) 連続性は、各点 $z \in D$ で z を中心とする円板 $\Delta(z; r)$ をとり、そこで制限して考えれば十分。よって、定理 2.2.1 (ii) より、主張は成立。（証明終）

次の定理の証明は省略する。

定理 2.2.7 D の複素函数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が広義一様有界かつ広義同程度連続であるならば、広義一様する部分列を持つ。

2.2.2 函数項級数

定義 2.2.8 (i) $A \subset \mathbb{C}$ 上の函数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ の第 N 項目までの和を $s_N := \sum_{n=0}^{N} f_n$ とし、**第 N 部分和** という。極限函数 $f = \lim_{N \to \infty} s_N$ が存在するとき、函数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は z で**収束する**といい、 $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ と書く。極限函数が存在しないとき、函数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は z で**発散する**という。A の任意の点で函数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ が収束するとき、この函数項級数は A で収束するといい、発散するとき、A で発散するという。
(ii) $A \subset \mathbb{C}$ 上の函数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ が $z \in A$ で**絶対収束**するということは、z で $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ が収束することとする。A の任意の点で絶対収束するとき、A で絶対収束するという。
(iii) A 上の函数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ が**一様収束**するとは、N-部分和の数列 $\{s_N\}_{N=0}^{\infty}$ が一様収束することをいう。

函数項数列で成立することは、函数項級数でも当然、成立するので、それらは繰り返さない。函数項級数の一様収束性に関し、次に次が成立する。

定理 2.2.9

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ が } A \text{ 上一様収束} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{s.t. ``} \left| \sum_{j=m}^{n} f_j(z) \right| < \varepsilon \quad \text{for } n > m \geq n_0,\ z \in A \text{ ``}$$

このとき、すべての f_n が連続ならば極限函数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ も連続。

（証明） $\underline{\Rightarrow}$: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ が一様収束しているとすると、

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{s.t. ``} \left| \sum_{j=0}^{n} f_j(z) - f(z) \right| < \epsilon \quad \text{for } \forall n \geq n_0,\ \forall z \in A.$$

だから、n_0 以上の任意の m、n に対し、

$$\left|\sum_{j=0}^{n} f_j(z)\right| = \left|\sum_{j=m}^{n} f_j(z) - f(z) - \left(\sum_{j=0}^{m-1} f_j(z) - f(x)\right)\right| \le \left|\sum_{j=m}^{n} f_j(z) - f(z)\right| + \left|\sum_{j=0}^{m-1} f_j(z) - f(x)\right| < 2\epsilon$$

よって、主張は成立。

$\Leftarrow$: 各 $z \in A$ に対し、 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ は、Cauchy 条件を満たすから収束する。 $f := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ とすると、

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{s.t. “} \left|\sum_{j=0}^{n} f_j(z) - \sum_{j=0}^{m} f_j(z)\right| = \left|\sum_{j=m+1}^{n} f_j(z)\right| < \varepsilon \quad \text{for } \forall n > m \ge n_0,\ z \in A \text{ “}$$

がいえる。ここで、$n \to \infty$ とすると、

$$\left|f(z) - \sum_{j=0}^{m} f_j(z)\right| \le \epsilon$$

がいえるから、この級数は f に一様収束する。

連続性については、定理 2.2.1 (ii) よりいえる。（証明終）

これも実数のときと同じだが、函数項級数の収束を調べるには、優級数の考え方を用いるのが便利である。

定義 2.2.10 (i) $A \subset \mathbb{C}$ 上の函数項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ と、$M_n > 0$ である級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ に対し、 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ が $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ の**優級数**であるとは、任意の $z \in A$、 $n \in \mathbb{N}$ に対し、$|f_n(z)| < M_n$ を満たすことをいう。

(ii) 開集合 $D \subset \mathbb{C}$ 上の函数項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ に対し、その N 有限和の列 $\{s_N\}_{N=0}^{\infty}$ が D 上広義一様収束しているとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は**広義一様収束**するという。

実数の場合と同様に、次が成立する。

定理 2.2.11 （優級数定理、Weierstrass の M 判定法） $A \subset \mathbb{C}$ 上の函数項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ が、収束する優級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ をもつとき、 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は、絶対かつ一様収束する。

広義一様収束する函数項級数について次が成立することも注意しておく。

定理 2.2.12 D 上の連続函数 f_n を項とする函数項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ が広義一様収束するならば、極限函数は連続。

2.2.3　べき級数

函数項級数の中で、最も基本的なのは $f_n(z) = a_n(z-c)^n$ （a_n、$c \in \mathbb{C}$）である場合である。このような級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ を **べき級数**という。z の適当な変数変換により、このべき級数は $c = 0$ の場合に帰着されるので、以後、しばらく、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の場合について考える。

補題 2.2.13 べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が、$\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n z_0^n| < +\infty$ を満たすならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は、$\Delta(0;|z_0|)$ 上絶対かつ広義一様収束する。

注: 明らかに、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \text{ が収束する.} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0 \quad\Longrightarrow\quad \overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n z_0^n| < +\infty$$

がいえるので、補題より、この３条件のどれかを満たすべき級数は絶対かつ広義一様収束することがいえる。

（補題の証明） $z_0 \neq 0$ の場合に示せば十分。仮定より、

$$\exists M > 0, \quad \text{s.t. } |a_n z_0^n| \leq M \quad \text{for } \forall n \in M$$

ここで、任意の $0 < r < |z_0|$ に対し、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ が $\overline{\Delta(0;r)}$ 上一様収束することを示す。$z \in \overline{\Delta(0;r)}$ に対し、

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq |a_n z_0^n| \frac{r^n}{|z_0|^n} \leq M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$$

ここで、$\dfrac{r}{|z_0|} < 1$ だから、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M_n \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ は収束する。これは、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ の優級数になっているので、主張は成立する。（証明終）

$z_0 \in \mathbb{C}$ でべき級数が収束するかどうかは、z_0 が原点からどれだけ離れているかによる。これを考えるのに、収束半径という言葉を用意する。

定義 2.2.14 べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が $\Delta(0;r)$ 上広義一様収束するような $r \geq 0$ の上限 $R(< +\infty)$ を、このべき級数の**収束半径**といい、円、$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ を**収束円**という。

収束円の内部（原点を含む側）では、べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は連続函数を定める。べき級数については、次の定理が知られている。これも実数の場合と同様なので、証明は省略する。

定理 2.2.15 (i) **(Cauchy-Hadamard)** べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径 R は、$R = \dfrac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ である。ただし、$1/+\infty = 0$、$1/0 = +\infty$ とする。

(ii) **(d'Alembert)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ $(\leq +\infty)$ が**存在すれば**、べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径 R は、$R = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ $(< +\infty)$ である。

注: Cauchy-Hadamard の公式は、R が 0、$+\infty$ の場合も含めた全ての場合に有効である。一方、d'Alembert の公式は、万能ではないが、扱いが簡単である。

例: d'Alembert の定理より、べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は、$|z| = 1$ で収束する。このとき、N 部分和は

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^N}{1-z}$$

だから、$N \to \infty$ として、

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

がいえる。(例終)

例: 上の級数で、自分自身との Cauchy 積をとると、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^k z^{n-k} = (n+1)z^n$ だから、

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2 = \frac{1}{(1-z)^2}$$

となる。このべき級数の収束半径も $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1$ である。(例終)

例: $a_n = 1/n!$ とすると、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = +\infty$ だから、べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ は、全複素平面上で収束する。後で見るように、この級数は複素函数としての指数函数となる。(例終)

例: a、b、c を複素数のパラメータとし、$a_0 = 1$、$a_n = \dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)\ b(b+1)\cdots(b+n-1)}{c(c+1)\cdots(c+n-1)\ n!}$ ($n > 0$) とすると、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{|n+1}|}{|a_n|} = 1$ だから、べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)\ b(b+1)\cdots(b+n-1)}{c(c+1)\cdots(c+n-1)\ n!} z^n$$

は、$z \in \Delta(0;1)$ で収束する。(例終)

問題: べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の a_n が、(1) $a_n = n^n$, (2) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ であるときの、収束半径を求めよ。

べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径を R とすると、収束円の外では、収束しない。収束円の上では、収束する点もあれば、

収束しない点もある。

例: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^n$ は、$z=1$ で収束しているが、$z=-1$ で発散する。（例終）

問題: 上の例を示せ。

2.3　解析函数と初等函数

2.3.1　解析函数

今後、主に扱うのは、複素平面上のある領域で、べき級数で表される複素函数である。

定義 2.3.1 複素平面上の開集合 $D \subset \mathbb{C}$ 上の函数 f が D 上で **解析的**である、または、D 上 **解析函数**であるとは、D の任意の点 z_0 に対し、$\Delta(z_0; r) \subset D$ となる $r > 0$ と $\Delta(z_0; r) \subset D$ で収束するべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ が存在し、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \qquad z \in \Delta(z_0; r)$$

が成立することとする。

上の定義において、f は D において連続である。表示

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \qquad z \in \Delta(z_0; r)$$

を、f の $z=z_0$ における **Taylor 展開**と呼ぶ。

定理 2.3.2 （一致の定理） f を領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の解析函数とする。部分集合 $E \subset D$ は E 内に少なくとも一つ集積点を持つとする。もし、f の E の制限 $f|_E$ が恒等的に 0 ならば、f は D 上恒等的に 0

（証明） $a \in D$ を E の集積点とする。f の a での Taylor 展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \qquad \Delta(a; r)$$

とする。$a_0 = f(a) = 0$ である。このとき、$\forall a_n = 0$ を示したい。$\{n \geq 1 \mid a_n \neq 0\} = \phi$ と仮定して、$n_0 = \min\{n \geq 1 \mid a_n \neq 0\}$ とする。$g(z)$ を

$$f(z) = (z-a)^{n_0}\{a_{n_0} + a_{n_0+1}(z-a) + \cdots\} = (z-a)^{n_0}\{a_{n_0} + (z-a)g(z)\}$$

とおく。ここで、 $g(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_0+n}(z-a)^{n-1}$。これは $\Delta(a; r)$ 上連続函数。したがって、正の数 $r_1 < r$ を十分小さくとると、

$$|(z-a)g(z)| < |a_{n_0}|, \qquad z \in \Delta(a; r_1)$$

したがって、$z \in \Delta(a; r)\backslash\{a\}$ に対しては、常に $f(z) \neq 0$。よって、$E \cap (\Delta(a; r_1)\backslash\{a\}) = \phi$ となる。これは、a が E の集積点であることに反する。

さて、D の部分集合 D' を

$$D' = \left\{ z \in D \;\middle|\; \exists r > 0, \quad \Delta(z;r) \subset D \text{ and } f|_{\Delta(z;r)} \equiv 0 \right\}$$

とする。明らかに D' は開集合で、上で示したことより、$D' = \phi$。$z \in D$ を D' の集積点とする。$f|_{D'} \equiv 0$ であるから、再び上で示したことより、$z \in D'$ でなければならない。よって $\overline{D'} \cap D = D'$。$D'$ は D 内の開かつ閉集合である。よって、$D' = D$。（証明終）

2.3.2　指数函数、三角関数

以前の例で見たように、べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ の収束半径は $+\infty$ である。これで定義される $\mathbb{C}$ 上の解析函数を **指数函数** と呼び、e^z または $\exp z$ と書く。z が実数のときは、このべき級数は、実函数としての指数函数の MacLaurin 展開になっている。複素函数としての指数函数も、指数定理が成立する。

命題 2.3.3 （指数定理） z、$w \in \mathbb{C}$ に対し、$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ 。

（証明）　$e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ は、任意の $z \in \mathbb{C}$ で絶対収束するから、

$$e^z \cdot e^w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k} z^k w^{(n-k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = e^{z+w}$$

である。（証明終）

これより、$e^z e^{-z} = 1$ も成立する。つまり、任意の e^z （$z \in \mathbb{C}$）に逆元が存在するから、$e^z = 0$ となる $z \in \mathbb{C}$ は存在しない。

次に、$\mathbb{C}$ 上の三角函数 $\cos z$、$\sin z$ を

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \qquad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

で定義する。このべき級数も、$\mathbb{C}$ 上絶対収束する。また、これ以外の三角函数は、実数変数の場合と同様に、

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \sec z := \frac{1}{\cos z}, \qquad \mathrm{cosec}\ z := \frac{1}{\sin z}, \qquad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$$

のように定義する。$z \in \mathbb{R}$ のときは、実関数としての（つまり、今までよく知っている）三角函数と一致する。複素変数でも、$\cos z$ が偶函数、$\sin z$ が奇函数であることは、べき級数の表示より明らか。また、指数函数、三角函数の定義から、次が導かれる。

命題 2.3.4 （Euler の公式） $e^{iz} = \cos z + i \sin z$、

これを逆に解くと、 $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$、 $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$。であることもわかる。

問題: 上の定理を証明せよ。

$z \in \mathbb{C}$ を極形式で表すときに、$z = r(\cos\theta = i \sin\theta)$ （$r > 0$、$-\pi < \theta \le \pi$ という書き方をしたが、Euler の公式を用いると、これを $z = re^{i\theta}$ と、さらに簡単に書くことができる。Euler の公式と指数定理を用いると、実数変数の場合では

お馴染みの次の三角函数の公式が複素変数でも成立することがわかる。

命題 2.3.5 (i) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ 、
(ii) **（加法定理）** $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, \quad \sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w.$

（証明）(i) $e^{iz}e^{-iz} = 1$ より、

$$1 = e^{iz}e^{-iz} = (\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z) = \cos^2 z + \sin^2 z \qquad \therefore\ \cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

(ii) cos の加法定理は、

$$\cos z \cos w - \sin z \sin w = \frac{(e^{iz}+e^{-iz})}{2} \cdot \frac{(e^{iw}+e^{-iw})}{2} - \frac{(e^{iw}-e^{-iz})}{2i} \cdot \frac{(e^{iw}-e^{-iw})}{2i} =$$
$$= \frac{e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} + e^{i(w-z)} + e^{-i(z+w)}}{4} + \frac{e^{i(z+w)} - e^{i(z-w)} - e^{i(w-z)} + e^{-i(z+w)}}{4} = \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \cos(z+w)$$

より成立。sin も同様。（証明終）

問題: 上の定理の余弦の加法定理を求めよ。

実数函数として $\sin z$、$\cos z$ は周期 2π を持つ周期函数であることを認めると、これらの函数は複素函数としても周期 2π を持つことがわかる。実際、例えば、$z = x + yi$ （x、$y \in \mathbb{R}$）とすると、

$$\cos(z+2\pi) = \cos(x+2\pi+iy) = \cos(x+2\pi)\cos(iy) - \sin(x+2\pi)\sin(iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) =$$
$$= \cos(x+iy) = \cos z$$

である。

これと、Euler の公式を用いると、

$$e^{z+2\pi i} = e^{i(-iz+2\pi)} = \cos(-iz+2\pi) + i\sin(-iz+2\pi) = \cos(-iz) + i\sin(-iz) = e^z$$

となることがいえる。さらに、次のことがいえる。

命題 2.3.6 複素函数 e^z は、基本周期 （最小の周期） $2\pi i$ を持つ単周期函数。

（証明） 上の議論に加えて、$2\pi i$ が e^z の最小の周期であることを言えばよい。e^z の任意の周期を $\omega = a + bi$ （a、$b \in \mathbb{R}$）とすると、

$$e^{z+\omega} = e^z \quad \Longrightarrow \quad e^\omega = 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 1 = |e^\omega| = e^a \quad \Longrightarrow \quad a = 0 \\ 0 \equiv \arg e^\omega \equiv b \pmod{2\pi} \quad \Longrightarrow \quad b = 2\pi n \ (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

よって、$2\pi i$ が基本周期となる。（証明終）

問題: (i) $\cos z$、$\sin z$ は、基本周期 2π の単周期函数であることを示せ。
(ii) $\tan z$ は基本周期 π の単周期函数であることを示せ。

2.3.3 対数函数、べき函数

定義 2.3.7 (i) $z \in \mathbb{C}$ に対し、対数函数 $\log z$ を指数函数の逆函数として定義する。

$$w = \log z \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad z = e^z.$$

(ii) $\alpha \in \mathbb{C}$ のべき函数 z^α を $z^\alpha := e^{\alpha \log z}$ で定義する。

これらを認めると、e^z の指数定理より、

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2, \qquad z = \log|z| + i \arg z$$

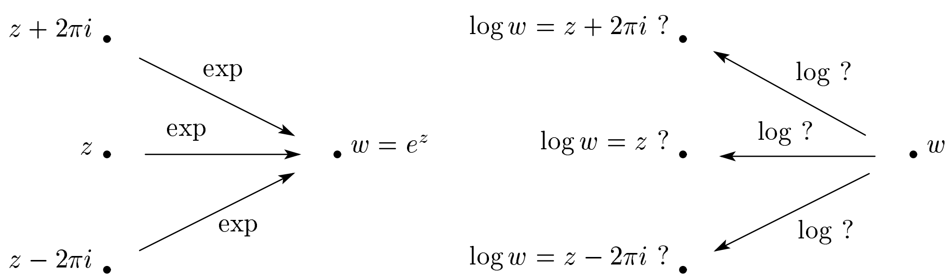
がなりたち、また、z^α の指数定理

$$z^{\alpha_1+\alpha_2} = z^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$$

も成り立つことになるので都合がよい。しかし、ひとつ困った問題がある。それは、実数函数の場合と違い e^z が周期 $2\pi i$ の周期函数であることである。つまり、上の定理を無制限に信じると、

$$w = e^z = e^{z+2\pi i} \quad \Longleftrightarrow \quad \log w = z \overset{?}{=} z + 2\pi i$$

となってしまう。

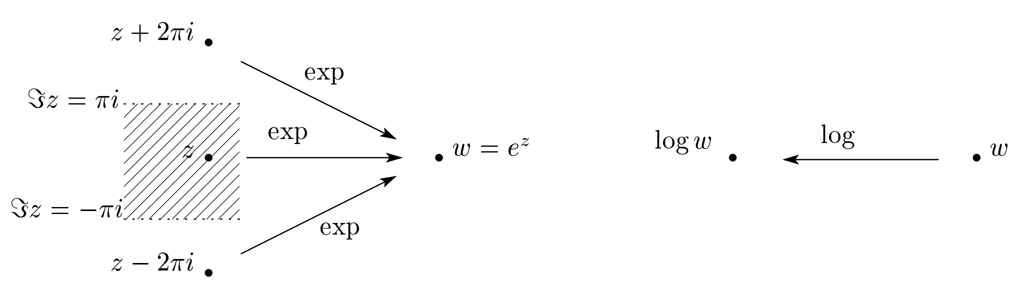


これに伴い、べき函数もおかしくなる。例えば $z^{1/2}$ に対して、

$$z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log z} = e^{\frac{1}{2}\log(ze^{2\pi i})} = e^{\frac{1}{2}(\log z + 2\pi i)} = e^{\frac{1}{2}\log z + \pi i} = e^{\frac{1}{2}\log z} e^{\pi i} = -z^{\frac{1}{2}} \ ??$$

となってしまう。このように、複素函数 f について、$\epsilon > 0$ をどんなに小さくしても、$f(z_0+\epsilon) \neq f(z_0+\epsilon e^{2\pi i})$ となる点 z_0 を f の**分枝点**という。つまり、$z=0$ は、$f(z) = \log z$、$f(z) = z^{1/2}$ の分岐点である。$A \subset \mathbb{C}$ に対し、$f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ が A 内に分岐点を持つとき、A を**多価函数**という。これに対し、$z \in \mathbb{C}$ に対し、$f(z)$ が一意に定まる普通の函数を**一価函数**という。

この問題を回避するひとつの手段として、$w = \log z$ の値域の変数の偏角の範囲を制限する方法がある。例えば、$n \in \mathbb{Z}$ を固定して、$-\pi + 2\pi n < \arg \log z < \pi + 2\pi n$ と最初に断っておけば、$w = e^z$ に対応する z はその範囲で一意に定まる。このように、偏角の範囲を定めて決まる対数函数のことを偏角を **分枝**という。



これから、特に断らない限り、$w = \log z$ の分枝は $-\pi < \arg w < \pi$ であるものとする。このように、定義域の実軸が値域の実軸に対応するような分枝を**主枝**ということがある。

$\log z$ のべき級数展開を考える上では、$e^0 = 1$ の近傍で考えるとよい。

命題 2.3.8 $|z| < 1$ に対し、 $\log(1+z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$ がなりたつ。

（証明の概略） 級数の収束半径が 1 であることは、d'Alambert の方法よりわかる。後は、

$$e^{\log(1+z)} = 1+z, \qquad \log e^z = z$$

を示せばよい。ここでは、 $e^{\log(1+z)} = 1+z$ がなりたつことを最初の 3 次までの項で見よう。級数は収束円の中で絶対収束するので、和の順番を変えてもよい。

$$\begin{aligned}
e^{\log(1+z)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\log^m(1+z)}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}\right)^m = \\
&= 1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}\right)^3 + \cdots = \\
&= 1 + \left(z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 \cdots\right) + \frac{1}{2}\left(z^2 - z^3 + \cdots\right) + \frac{1}{6}(z^3 - \cdots) = \\
&= 1 + z + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) z^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) z^3 + \cdots \\
&= 1 + z + O(z^4)
\end{aligned}$$

実は、同様に、上の級数の z^n （$n \geq 2$）の係数は 0 になることがいえる。（終）

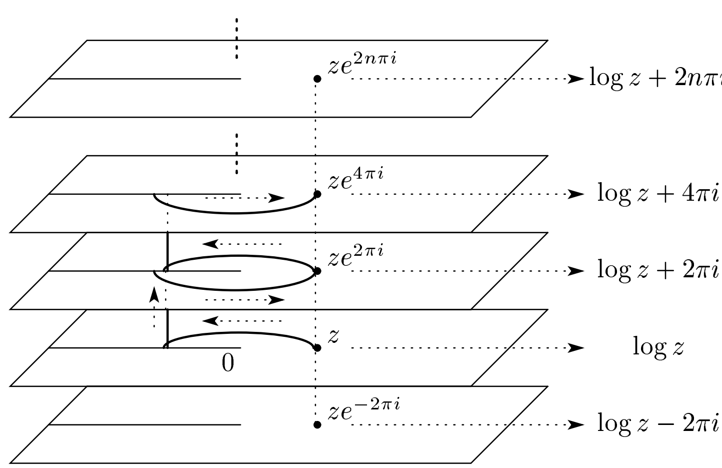
問題: (1) 上と同様に、 $\log e^z = z$ をが成り立つことを、3 次の係数まで比較して調べよ。
(2) （難しいかも？） 全ての係数をきちんと計算し、$e^{\log(1+z)} = 1+z$、$\log e^z = z$ を証明せよ。

対数函数の級数表示は、微分を導入すれば、すぐ求まるので、ここでは概略だけで我慢する。

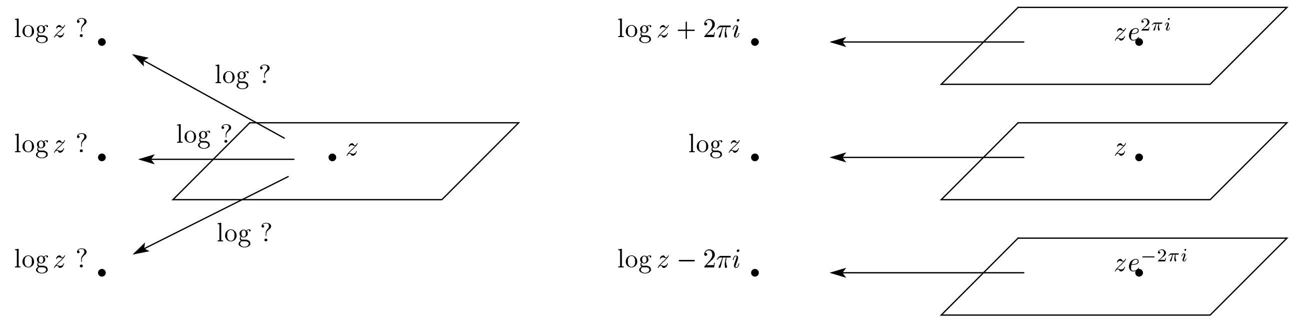
2.3.4 （直感的） Riemann 面

前の節で、対数函数 $w = \log z$ が多価函数になってしまうことを、分枝を定めることで回避したが、積分を考えるときのような、z を連続的に動かしたい場合には不都合である。そのため、今までの考え方を変えて、函数の値域に合わせて定義域を拡張する。

まず、対数函数 $\log z$ について考えてみよう。諸悪の根源は、$w = \log z$ を「指数函数の逆函数」と決めたときに $\log z \neq \log(ze^{2\pi i})$ だったことによる。だから、これらの点は、「全て違うもの」だと考える。つまり、複素平面の負の実軸にカットをいれたものを可算無限個用意して、分岐点 0 の周りを一回転して、カットを正の方向から通過したら次は上の複素平面に移り、負の方向から通過すると下の平面に移るようにする。これを対数函数の定義域だと思う。



これで、対数函数 $\log z$ が一価函数になるような定義域を定めることができる。

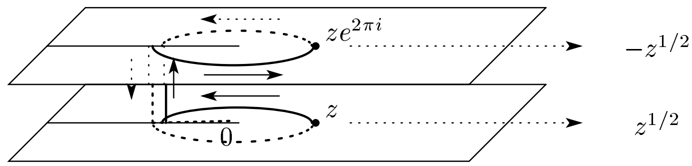


上のように、複素函数 f が多価函数であるとき、それを一価函数にするように複素平面を貼り合わせた定義域を f の **（直感的）Riemann 面**[1]という。

べき函数 z^α （$\alpha \neq \mathbb{Z}$） に関しても同様に考える。例として、$z^{1/2}$ について考えてみよう。このとき、

$$(ze^{2\pi i})^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2}\log(ze^{2\pi i})\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(\log z + \log e^{2\pi i})\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\log z + \pi i\right) = z^{1/2}e^{\pi i} = -z^{1/2} \neq z^{1/2}$$

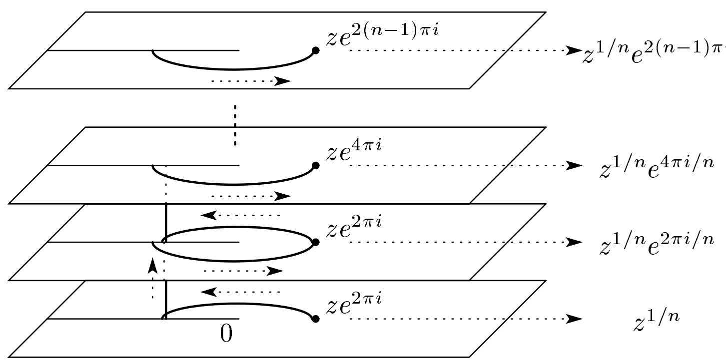
だから、$f(z) = z^{1/2}$ は分岐点になる。ここで、$f(ze^{4\pi i}) = z^{1/2}e^{2\pi i} = z^{1/2} = f(z)$ より、z の周りを 2 回転すると $w = f(z)$ はもとの値に等しくなる。つまり、この場合は、図のような、複素平面を 2 枚用意した Riemann 面を考えると、$w = z^{1/2}$ にちょうどよい定義域が得られる。負の実軸に入れたカットを横切るときは、異なるシートに行くようにする。



同様に、$w = f(z) := z^{1/n}$ （ $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$）の場合は、

$$f(ze^{2\pi i}) = z^{1/n}e^{2\pi i/n}, \quad f(ze^{4\pi i}) = z^{1/n}e^{4\pi i/n}, \quad \cdots$$
$$\cdots \quad f(ze^{2k\pi i}) = z^{1/n}e^{2k\pi i/n}, \quad \cdots$$
$$f(ze^{2n\pi i}) = z^{1/n}e^{2\pi i} = z^{1/n} = f(z)$$

だから、複素平面を n 枚用意して、カットを横切るとき、次のシートに移るような Riemann 面を考えればよい。やはり、正の向きにカットを横切ると上のシートに、負の向きに横切ると下に行くことにする。ただし、一番上のシートのカットを正の向きに横切ると、一番下のシートに戻り、一番下のシートのカットを負の向きに横切ると、一番上のシートに行くこととする。

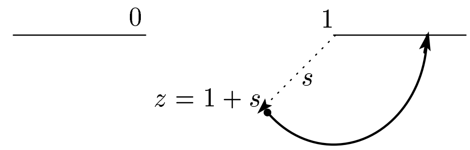


次に、分岐点が複数ある場合の簡単な例として、$w = f(z) = \sqrt{z(1-z)}$ を見ておこう。このときは、$z = 0$、1 が f の分岐点である。実際、$|z| < 1$ に含まれる点 z を 0 の周りで正の方向に一回転させるときは、$\log z$ は 0 のみを分岐点に持つことに注意すると、

$$f(ze^{2\pi i}) = \exp\left(\frac{1}{2}\log(ze^{2\pi i}) + \frac{1}{2}\log(1 - ze^{2\pi i})\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\log z + \pi i + \frac{1}{2}\log(1-z)\right) = -\sqrt{z(1-z)}$$

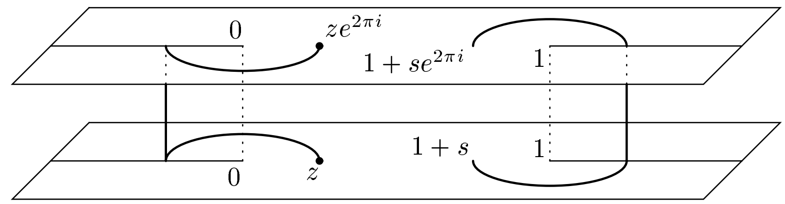
[1]「直感的」といっているのは、厳密な意味での Riemann 面は、「1 次元の複素多様体」として定義されるからである。ここでは、そういう議論を避けて、図形的な概説だけで説明を行う。不満な人は、後できちんと勉強してほしい。

となり、$z=0$ は分岐点。次に $z=1$ の周りで一回転させることを考える。そのためには $z=1+s$ ($|s|<1$) とおいて 、$z=1+se^{2\pi i}$ と比較してみると、



$$f(1+se^{2\pi i}) = \exp\left(\frac{1}{2}\log(1+se^{2\pi i})+\frac{1}{2}\log(se^{2\pi i})\right) =$$
$$= \exp\left(\frac{1}{2}\log(1+s)+\frac{1}{2}\log s+\pi i\right) = -\sqrt{(1+s)s}$$
$$= -\sqrt{z(1-z)}$$

となる。以上の考察より、次のような Riemann 面を考えるとよい。まず、複素平面２枚を用意して、それに、$z=0$ から $z=-\infty$ へのカットと、$z=1$ から $z=\infty$ へのカットを入れることにする。それぞれのカットを横切ると、もう一枚のシートのカットに行くように定める。このような Riemann 面は、後で楕円積分を考えるときに重要になる。



実は、積分や解析接続が問題になる時まで、当分、Riemann 面の考え方は使わないのだが、考え方を説明するには、対数函数を導入したときがよいと思ったので解説してみた。Gauss 平面、Riemann 球面、Riemann 面など、複素函数の定義域を表すいろいろな方法を導入したが、以後は、適宜、わかりやすいと思われる方法を用いるので、今、どういう定義域にいるのかを確認しながら考えてほしい。

2.3.5 一次変換

もうひとつ、複素変数の変換として重要なものを調べておこう。ここでは、無限遠点 ∞ を仲間外れにしないほうが見通しがよいので、定義域、値域に Riemann 球面 $\mathbb{P}^1=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ を用いる。

まず、$\mathbb{P}^1$ から $\mathbb{P}^1$ への写像

$$f(z) := \frac{az+b}{cx+d} \qquad (ad-bc\neq 0)$$

を考えたいが、分子、分母に同じ数をかけても $f(z)$ の値は変わらないから、係数を調整して

$$ad-bc=1$$

としても一般性を失わない。以後、この条件のもとで考察を進める。f が複素数を複素数に移す場合はこれでよいが、それ以外の場合の行き先を次のように決めておく。

$$c=0 \text{ の場合 } : f(\infty)=\infty, \qquad c\neq 0 \text{ の場合 } : f(\infty)=\frac{a}{c}, \qquad f\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty$$

これで、$\mathbb{P}^1$ 上の全ての点から、$\mathbb{P}^1$ 上の全ての点への写像が定義できたことになる。しつこいが、まとめておく。

定義 2.3.9 a、b、c、d を $ad-bc=1$ を満たす複素係数とする。*Riemann* 球面 $\mathbb{P}^1$ からそれ自身への写像 f を次のように定める。

(i) $c=0$ のとき、 $f(\infty)=\infty, \qquad f(z)=\dfrac{az+b}{d} \quad (z\in\mathbb{C})$

(ii) $c\neq 0$ のとき、 $f(\infty)=\dfrac{a}{c}, \quad f\left(-\dfrac{d}{c}\right)=\infty, \qquad f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d} \quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{-d/c\})$

と定める。この変換を **一次変換 （ Möbius 変換）**という。$\mathbb{P}^1$ 上の１次変換全体の集合を Aut ($\mathbb{P}^1$) と書く。

１次変換 $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ は、

$$c = 0 \quad のとき \quad f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \qquad c \neq 0 \quad のとき \quad f(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\frac{1}{z+d/c}$$

と書き直せる。つまり、この変換は、

$$f(z) = Az \text{ (定数倍)}, \quad f(z) = z + B \text{ (平行移動)}, \quad f(z) = \frac{1}{z} \text{ (反転)}$$

の３種類の操作の合成で得られる。

$z \in \mathbb{P}^1$ が f の **不動点**、すなわち $z = f(z)$ を満たす点とする。この不動点に関して、１次変換は次のように分類される。

(A) $c = 0$ のとき: $f(z) = \dfrac{az+b}{d}$ で、$z = \infty$ が不動点。

(i) $a = d$ なら $z + \dfrac{b}{d} = z$ になる。このとき、$b = 0$ ならば $f(z) = z$ になってしまうので、$b \neq 0$ だから、$z = \infty$ がただひとつの不動点である。つまり、１次変換 $w = f(z)$ は

$$w = z + k \qquad (k = b/d \neq 0)$$

と書ける。

(ii) $a \neq d$ のとき、$\dfrac{az+b}{d} = z$ より、$z = \dfrac{b}{d-a} \neq \infty$ がもうひとつの不動点になる。このとき、$\alpha := b/(d-a)$、$\beta = \infty$ とすれば、

$$w - \alpha = \frac{az+b}{d} - \frac{b}{d-z} = K(z-\alpha), \quad \left(K = \frac{a}{b}\right)$$

と書き直すことができる。

(B) $c \neq 0$ のとき : $\dfrac{az+b}{cz+d} = z \iff cz^2 + (d-a)z - b = 0$ の判別式を $D := (d-a)^2 + 4bc$ とする。

(i) $D \neq 0$、すなわち二つの不動点 α、β が存在するとき、$w = f(z)$ は、

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta} = K\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

と書ける。

(ii) $D = 0$ ならひとつの不動点 α が存在する。このときは、$w = f(z)$ は、

$$\frac{1}{w-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + k \qquad \left(k = \frac{d}{b-da}\right)$$

と書ける。

以上から、$w = f(z)$ $(f \in \mathrm{Aut}\ (\mathbb{P}^1))$ は、次のように分類される。

命題 2.3.10 １次変換 $w = f(z)$ は次のどれかの形で表される。

(i) 不動点がひとつの場合、適当な k により、

$$w = z + k, \qquad または \qquad \frac{1}{w-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + k$$

のいずれか。この形を **放物的**という。

(ii) 不動点が α、β のふたつの場合、$w = f(z)$ は、

$$w - \alpha = K(z-\alpha) \quad (\beta = \infty), \qquad または \qquad \frac{w-\alpha}{w-\beta} = K\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

のいずれかで表せる。この両者の 比例定数 K を $K = re^{i\theta}$ と表したとき、$K = r > 0$ なら **双曲的**、$K = e^{i\theta}$ なら **楕円的**、それ以外のときを **斜航的**という。

問題: (1) 単位円をそれ自身に移す１次変換は斜航的でないことを示せ。
(2) $z = \epsilon(z - z_0)/(1 - \overline{z_0}z)$ （$|\epsilon| = 1, \epsilon \neq 1, |z_0| > 1$）の形の１次変換は常に斜航的であることを示せ。

問題: $w = f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ としたとき、
(i) f が双曲的 $\Longleftrightarrow a + d > 2$ または $a + d < -2$、 (ii) f が楕円的 $\Longleftrightarrow -2 < a + d < 2$、
(iii) f が方物的 $\Longleftrightarrow a + d = \pm 2$、 (iv) f が斜航的 $\Longleftrightarrow a + d \notin \mathbb{C}$
が成立することを示せ。ただし、不等式で表されている $a + d$ は、全て実軸上にあるものとする。

１次変換の集合について、次の定理が成立する。

定理 2.3.11 Aut $(\mathbb{P}^1)$ は写像の合成を積として群をなす。その群と特殊線型群

$$SL(2, \mathbb{C}) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; ad - bc = 1, \; a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

は、対応

$$\Phi \; : \; SL(2, \mathbb{C}) \ni \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \frac{az + b}{cz + d} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$$

によって群準同型になり、 $\mathrm{Ker}\ \Phi = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ である。

（証明） $z = \infty$ に対応する値は、極限操作と思えば得られるので、特別に扱わない。f_1、$f_2 \in \mathrm{Aut}\ (\mathbb{P}^1)$ を、

$$f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \qquad f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

とする。このとき、

$$(f_1 \circ f_2)(z) = \frac{a_1 f_2(z) + b_1}{c_1 f_2(z) + d_1} = \frac{a_1 \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) z + (b_1 c_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2) z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)}$$

だから、これは、Aut $(\mathbb{P}^1)$ の元である。また、恒等写像 $z \longmapsto z$ が単位元、 $f(z) = \dfrac{az + cz}{cz + d}$ に対し、逆元 f^{-1} は $f^{-1}(z) = \dfrac{dz - b}{-cz + a}$ となる。また、この右辺より、

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) = \Phi\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \right) \Phi\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right)$$

がいえるので、Φ は準同型。また、 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}\ \Phi$ とすると、 $\dfrac{az + b}{cz + d} = z$ だから、$b = c = 0$、$ad = 1$ がいえるので、 $\mathrm{Ker}\ \Phi = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ がなりたつ。（証明終）

上の定理と準同型定理より、

$$\mathrm{Aut}\ (\mathbb{P}^1) \simeq SL(2, \mathbb{C}) \Big/ \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

である。右辺の群を **射影的特殊線型群**といい、$PSL(2,\mathbb{C})$ と書く。

次に、この変換の幾何学的な性質を考えよう。まず、１次変換は、次のような写像として特徴付けられる。

定理 2.3.12 $\mathbb{P}^1$ 上の相異なる３点の組を (z_1, z_2, z_3)、(w_1, w_2, w_3) のふたつ定めたとき、$f \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{P}^1)$ で $f(z_j) = w_j$ （$j = 1, 2, 3$）を満たすものがただひとつ存在する。

（証明） $\mathbb{P}^1$ 上の ４点 z_1、z_2、z_3、z_4 に対し、**非調和比 （複比）** (z_1, z_2, z_3, z_4) を

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}$$

で定める。ただし、ある j に関し、$z_j = \infty$ のときの非調和比は、 $\lim\limits_{n\to\infty}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ で定める。このとき、$w_j = f(z_j)$ （$j = 1, 2, 3, 4$）とすると、

$$w_j - w_k = \frac{az_j + b}{cz_j + d} - \frac{az_k + b}{cz_k + d} = \frac{(ad - bc)(z_j - z_k)}{(cz_j + d)(cz_k + d)}$$

がなりたつ。これより、非調和比の不変性

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

がなりたつので、特に、$z_4 = z$、$w_4 = w$ としたときの

$$(w_1, w_2, w_3, w) = (z_1, z_2, z_3, z)$$

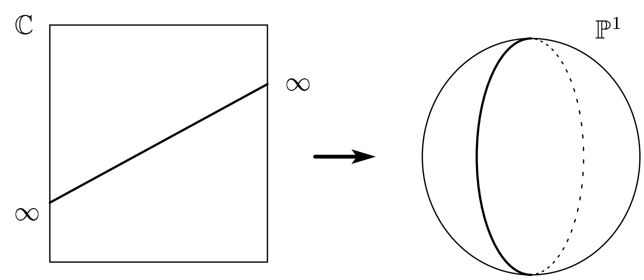
を考えると、$w_1 = f(z_1)$、$w_2 = f(z_2)$、$w_3 = f(z_3)$ が決まっているとき、 z から $w = f(z)$ は一意に定まる。（証明終）

問題: (i) 0、1、∞ を i、$2i$、$3i$ に移す１次変換を求めよ。 (ii) 1、2、3 を $1+i$、$2+i$、$1+2i$ に移す１次変換を求めよ。

次に、１次変換が $\mathbb{P}^1$ 上の図形や領域をどのように移すか考えてみよう。まず、複素平面上の円に加えて、複素平面上の直線も、∞ で両端が交わると思って Riemann 球面上の円と呼ぶことにする。このとき、$\mathbb{P}^1$ 上の円は、常に、$\mathbb{C}$ の相異なる２点 z_1、z_2 と $k > 0$ を用いて

$$\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = k$$

と表される。（これは、いわゆる Apollonius の円）



問題: $\dfrac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = k$ （z_1、$z_2 \in \mathbb{C}$、$k > 0$）が $\mathbb{P}^1$ で円をなすことを示せ。

このとき、次が成立する。

定理 2.3.13 １次変換は $\mathbb{P}^1$ 上の円を $\mathbb{P}^1$ 上の円に移す（この対応を **円円対応**という。）。

（証明） １次変換 $f(z)$ は、次の３種類の変換

$$f(z) = Az, \qquad f(z) = z + B, \qquad f(z) = \frac{1}{z}$$

の合成だったから、これらで円 $\dfrac{|z-z_1|}{|z-z_2|}=k$ 上の点が円 $\dfrac{|w-f(z_1)|}{|w-f(z_2)|}=k'$ （$k'>0$）上の点に移ることを示せばよい。まず、$w=f(z)=Az$ について、

$$\frac{w-f(z_1)}{w-f(z_2)}=\frac{Az-Az_1}{Az-Az_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}=k$$

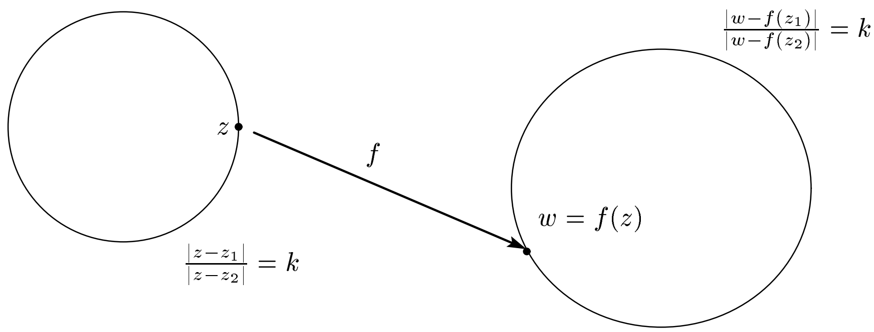
となり、主張は成立。$w=f(z)=z+B$ の場合について、

$$\frac{w-f(z_1)}{w-f(z_2)}=\frac{(z+B)-(z_1+B)}{(z+B)-(z_2+B)}=\frac{z-z_1}{z-z_2}=k$$

で、主張は成立。$w=f(z)=1/z$ のとき、

$$\frac{w-f(z_1)}{w-f(z_2)}=\frac{(1/z)-(1/z_1)}{(1/z)-(1/z_2)}=\frac{z_2(z_1-z)}{z_1(z_2-z)}=\frac{z_2}{z_1}\frac{z-z_1}{z-z_2}=\frac{z_2}{z_1}k$$

となる。よって、３種類の変換全てが主張を満たすから、それらの合成で得られる一般の１次変換も、円上の点を、別の円上にうつす。（証明終）



中心 O、半径 r の円周を κ とする。点 O を通る同じ半直線上にある二点 P、Q に対して、$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=r^2$ となっているとき、P、Q は円 κ に対し**鏡像**であるという。点 O に対して鏡像である点は ∞ とする。

　二点 p、q が円 $|z-z_0|=r$ に対し、鏡像の位置にあることは、

$$(p-z_0)(\overline{q}-\overline{z_0})=r^2$$

で表される。したがって、$p=z_0+\rho e^{i\lambda}$ とおけば、$q=z_0+(r^2/\rho)e^{i\lambda}$ である。これより、円 $|z-z_0|=r$ は、p、q からの距離の比が $(r-\rho)\ :\ (r^2/\rho-r)=\rho\ :\ r$ であるような点の軌跡としての Apollonius の円 $\dfrac{|z-p|}{|z-q|}=\dfrac{\rho}{r}$ に他ならない。逆にいうと、Apollonius の円 $\dfrac{|z-z_1|}{|z-z_2|}=k$ は、z_1、z_2 が鏡像になるような円を定めていることになる。

問題: z_1、z_2 が鏡像の関係になるような円周 $\dfrac{|z-z_1|}{|z-z_2|}=k$ （$k>0$）の中心 z_0 と、半径 r は、

$$z_0=\frac{p-k^2q}{1-k^2},\qquad r=\frac{k|p-q|}{|1-k^2|}$$

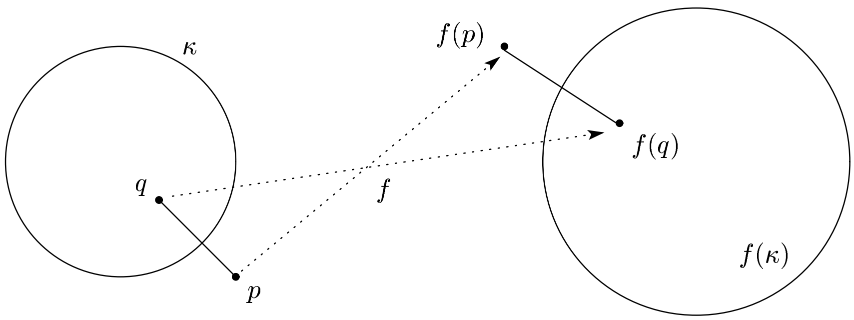
となることを示せ。

このとき、円円対応の考え方を用いると、１次変換 f によって、p、q を鏡像の関係とする円を $w=f(z)$ で変換した軌跡は

$$\frac{|w-f(p)|}{|w-f(q)|}=k',\qquad \left(k'=\frac{|cq+d|}{|cp+d|}\right)$$

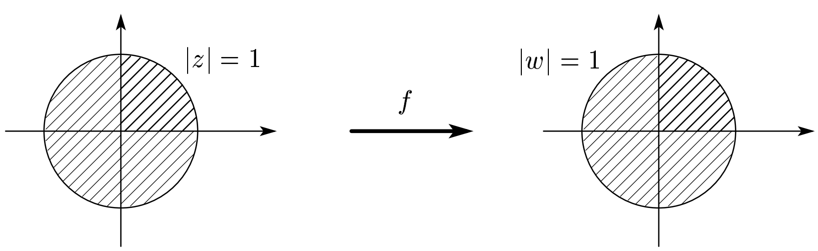
となり、$f(p)$、$f(q)$ を鏡像の関係とするような円周になる。以上をまとめると、以下の定理が成立したことになる。

命題 2.3.14 （鏡像の原理） *Riemann* 球面上の円に対し、鏡像の位置にある２点は、任意の１次変換によって、変換で移された円に対し、鏡像である２点に移される。



領域間の１次変換の中で重要なものを挙げておく。

定理 2.3.15 (i) 単位円の内部 $\Delta(1) := \Delta(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を $\Delta(1)$ に移す変換 （これを Aut $(\Delta(1))$ とかく）は、 $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{-\overline{a}z+1}$, $(a \in \Delta(1),\ \theta \in \mathbb{R})$ で表される。
(ii) 任意の２点 α、$\beta \in \Delta(1)$ に対し、$f \in \Delta(1)$ で、$f(\alpha) = \beta$ を満たすものが存在する（この性質を、Aut $(\Delta(1))$ は、$\Delta(1)$ に**推移的に作用する**という。)。



（証明） 原点 0 を中心とし、半径 1 の円を κ とする。$a \in \Delta(1)$ に対し、$\varphi_a(\kappa) = \kappa$、$\varphi_a(\Delta(1)) = \Delta(1)$、$\varphi_a(a) = 0$ となるような１次変換を求める。a の κ に関する鏡像は $1/\overline{a}$ であるから、$\varphi_a(1/\overline{a}) = \infty$ となる。これより、

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{-\overline{a}z+1}$$

としてみる。実際、$\varphi_a(a) = 0$ で、

$$|z| = 1 \implies \left|\frac{z-a}{-\overline{a}z+1}\right| = \frac{|z-a|}{|\overline{a}-\overline{z}|} = 1, \qquad |z| < 1 \iff 1 - \frac{|z-a|^2}{|\overline{a}-1|^2} = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|\overline{a}z-1|^2} > 0$$

これより、$\varphi_a(\kappa) = \kappa$、$\varphi_a(\Delta(1)) = \Delta(1)$ がわかる。よって、条件を満たす１次変換がひとつ得られた。

次に、$f \in$ Aut (Δ) としたとき、$g := f \circ \varphi^{-1}_{f^{-1}(0)}$ は１次変換で、$g(0) = 0$ である。0 の κ に関する鏡像は ∞ だから、$g(z) = \alpha z$ と表される。$g(\kappa) = \kappa$ より、$|\alpha| = 1$。よって、$\alpha = e^{i\theta}$ （$\theta \in \mathbb{R}$）とおける。したがって、

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{-\overline{a}z+1}$$

となる。(証明終)

命題 2.3.16 上半平面 $\mathbb{H} = \{\ z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\ \}$ を $\Delta(1)$ に移す 1 次変換 ψ は、 $\psi(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ である。

（証明） 練習問題。

問題: 上の命題を証明せよ。

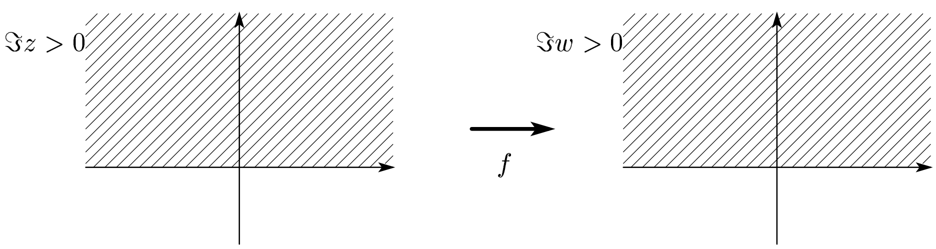
上半平面 $\mathbb{H}$ を保つ写像のなす群を Aut $(\mathbb{H})$ とすると、これは Aut $(\mathbb{P}^1)$ の部分群である。この群について次が成立する。

命題 2.3.17 (i) 実特殊線型群を $SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle|\ ad-bc=1, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ とすると、

$$\Phi\ :\ SL(2;\mathbb{R}) \ni \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \longmapsto \quad f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{Aut }(\mathbb{H})$$

は群準同型で、 $\text{Ker }\Phi = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$。

(ii) Aut $(\mathbb{H})$ は $\mathbb{H}$ に推移的に作用する。



（証明） f は $g \in$ Aut $(\Delta(1))$ があって、$f = \psi^{-1} \circ g \circ \psi$ と書かれるから、Aut $(\mathbb{H})$ は $\mathbb{H}$ に推移的に作用することがわかる。

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad-bc=1$$

とおくと、$\{f(0), f(1), f(\infty)\} \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ より、a、b、c、d がすべて実数。よって、$f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ であり、

$$\Im z > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Im f(z) = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} \right\} = \frac{\Im z}{|cz+d|^2} > 0$$

よって、$f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ となる。（証明終）

問題: (i) 次の 6 個の Riemann 球面上の 1 次変換[1]

$$z, \quad 1-z, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{1}{1-z}, \quad \frac{z}{z-1}, \quad \frac{1-z}{z}$$

は群をなすことを示せ。

(ii) 上の変換のなす群は、$\{0, 1, \infty\}$ の置換群になることを示せ。

[1] ラフな言い方をすると、$-\infty = \infty$ と思ってしまってよい