3 次方程式の解の公式

宮澤 雅樹
miyaz@nifty.com
http://homepage3.nifty.com/sugaku

数学に興味を持った高校生がたまに聞いてくるのが, この 3 次方程式の解法である. 2 次方程式の解の公式を習い, 3 次方程式をならえば, この魔法のような解の公式に興味を持つのも当然といえる. この文章は, 参考文献を中心に調べ, 実際計算してみた内容をまとめたものである.

1　数学試合

現在, 3 次方程式の解法は「カルダノの公式」として広く知られているが, 様々なエピソードが残されている. 16 世紀当時, 「数学試合」というのが流行っていた. 2 人の数学者が難問を出し合い, 決闘のように解きあうというものである. （15 問ずつ出して 15 日間で解くとかそういう感じ）今でこそ違和感のあるものだが, 当時はその能力が武術や芸術と同様に徳の高いものであり, お互い技を競い合うものとして考えられていたそうである. しかしながら, 数学試合には大きな欠点があった. 新しいものを発見したとしても「数学試合」のために公表しないのである. 事実, 3 次方程式の解法を最初に発見したのが 16 世紀始めイタリアで活躍した数学者フェルロ (1465-1526) だといわれているが, 当時の秘密主義のためその方法は伝わっていない.

数学試合に話を戻そう. フェルロの活躍の後, その弟子のフロリドが「3 次方程式を解ける」ということを武器として数学試合の有名人として活躍する. しかし, その栄光もつかの間で, ヴェネツィアの数学者ニコロ・フォンタナ (1506-1557)（通称タルターリア　イタリア語で' うまく話せない人' の意味）がフロリドを破ってしまう. タルターリアはフロリドが出した 3 次方程式の難問を 2 時間で解いてしまった. その様子を見て, フロリドは失神してしまったという話が残っている. （そのぐらいタルターリアは大物だった !! ）タルターリアはフロリドの 3 次方程式の解法を自力で発見し, さらに強力なものに自分で発展させていたようである. しかしながら, 当時の慣習のために世に公表することはなかった.

ところが, ミラノの数学者カルダノ (1501-1576) の熱心な頼みに根負けしたタルターリアは「絶対に公表しない」という約束のもと, その解法を教えてしまった.　しかし, カルダノはその約束を破って 1545 年に公表した「アルス・マグナ」という書物にこの解法を載せてしまう. こうして, 今現在も「カルダノの公式」と呼ばれれるようになってしまっている. カルダノの言い分, カルダノとタルターリアの決闘など, 後日談がさらに続くのであるが, 参考文献等をご覧いただきたい.

2　3 次方程式の解法

2.1　3 次方程式の変形

3 次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)$$

は, 次の形に変形可能である.

$$y^3 + my = n.$$

つまり, 2 乗の項のない形という意味である. それは次のように示される.

証明 1　$x = y + \alpha$ とする. *3* 次方程式の式に代入すると,

$$a(y+\alpha)^3 + b(y+\alpha)^2 + c(y+\alpha) + d = 0$$

y^2 の項の係数が 0 になるように α を定めるとよい. 展開, 整理した後の y^2 の項の係数は $3a\alpha + b$ なので, $\alpha = -\dfrac{b}{3a}$, すなわち, $x = y - \dfrac{b}{3a}$ とおけば, $y^3 + my = n$ の形に変形できる.

□

2.2　1 つの解の求め方

以上の結果から, $y^3 + my = n$ の形の 3 次方程式の解の求め方を調べればよいことになった.
$y = u + v$ とおく, これを 3 次方程式に代入すると,

$$(u+v)^3 + m(u+v) = n.$$

展開して整理すると次の式が得られる.

$$u^3 + v^3 + (3uv + m)(u+v) = n.$$

このとき, $n = 0$ ならば因数分解により 2 次方程式に帰着できるので, $u + v \neq 0$ とする. $u^3 + v^3 = n$ となるような u, v を選ぶと, $3uv = -m$ になる. 従って, $u^3v^3 = -\dfrac{1}{27}m^3$.

以上から, u^3 と v^3 は, 解と係数の関係より, 2 次方程式

$$t^2 - nt - \frac{1}{27}m^3 = 0$$

の解になる. ゆえに, 2 次方程式の解の公式から,

$$u^3 = \frac{1}{2}\left(n + \sqrt{n^2 + \frac{4}{27}m^3}\right), \quad v^3 = \frac{1}{2}\left(n - \sqrt{n^2 + \frac{4}{27}m^3}\right).$$

それぞれの 3 乗根の正のものをとり, y, すなわち, 3 次方程式の解の一つを求めると,

$$y = u + v = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(n + \sqrt{n^2 + \frac{4}{27}m^3}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(n - \sqrt{n^2 + \frac{4}{27}m^3}\right)}$$

となる.

2.3　3 次方程式の残りの解の求め方

カルダノは負の解の存在を認めていたといわれるが, 後のジラール (1590-1633) という数学者は複素数の根の存在も認めていたといわれる. 現在においては, 3 次方程式に複素数の解が存在することがあるのは高校生でも常識であるが, 当時は実数の範囲内で求めようとする試みがなされていた. 実数の範囲では不可能ということは, しばらくたってから証明されたという.

以下, $u^3 = A$, $v^3 = B$, $w = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とする.

まず, $x^3 = 1$ の解は因数分解により, 1, w, w^2 ということがわかる. $x^3 = a$ の解は $\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{a}}\right)^3 = 1$ と考えることにより, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a}w$, $\sqrt[3]{a}w^2$ の 3 つであることがわかる.

したがって, $u = \sqrt[3]{A}, \sqrt[3]{A}w, \sqrt[3]{A}w^2$, $v = \sqrt[3]{B}, \sqrt[3]{B}w, \sqrt[3]{B}w^2$ であることがわかり, $u + v$ は 9 通りあることが考えられることになる. しかし, 代数学の基本定理（後述）によれば解は 3 つである. 実際には, 9 通りのうちから, $3uv = -m$, すなわち, $uv = -\dfrac{m}{3}$ が成り立っているものを選ばなければならない. 実は, $u = \sqrt[3]{A}$, $v = \sqrt[3]{B}$ のときにはちゃんと成り立っている. 以上より, 求める解は,

$u = \sqrt[3]{A}, v = \sqrt[3]{B}$
$u = \sqrt[3]{A}w, v = \sqrt[3]{B}w^2$
$u = \sqrt[3]{A}w^2, v = \sqrt[3]{B}w$
の場合となる.

3 4次方程式の解法

カルダノが記したアルス・マグナには4次方程式の解法も載せられている. しかしながらこれは, 弟子であるフェラリ (1522-1565) が発見したといわれている. アイデアとしては, 4次方程式を x^2 の2次方程式に帰着できれば, x^2 を求めた後, その平方根を求めることにより解を求めるという, 案外普通の解き方である.

4次方程式

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (a \neq 0)$$

は, 3次方程式のときと同様に計算し, $x = y - \dfrac{b}{4a}$ とおくと, 次の形に変形可能である.

$$y^4 + py^2 + qy^2 + r = 0.$$

以降, 4次方程式を $y^4 + py^2 + qy^2 + r = 0$ とする. ある定数 t を使って, 強引に平方完成することを考える. つまり, $y^4 = -py^2 - qy^2 - r$ の両辺に $2y^2t + t^2$ を加え, 左辺を平方完成すると, 次の式を得る.

$$(y^2 + t)^2 = (2t - p)y^2 - qy + t^2 - r$$

ここで, 右辺も完全平方式となるように t を定めることを考える. そのためには, 右辺の判別式が0であるような t を考えればよい. すなわち,

$$q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r) = 0.$$

これを整理すれば, t の三次方程式がでる. これは, 前に説明したように解を求めることができるので, その解を求めれば,

$$(y^2 + t)^2 = (mx + n)^2$$

の形に変形することができる. したがって, $y^2 + t = \pm(mx + n)$ を得られ, 2次方程式の解の公式でそれぞれを解くと, 解を求めることができる.

4 5次以上の方程式と代数学の基本定理

5次以上の方程式に関して解の公式は存在するのか?という問題は長年未解決問題として扱われていたが, 1826年にアーベル (1802-1829) が19歳のときに代数的演算（加減剰余・累乗根）を通して解くことはできないことを証明した. 若くして未解決問題を解くという快挙を成し遂げたアーベルであったが, その後は不幸が続く. 提出した楕円関数の論文をコーシーが家に持ち帰ったまま忘れたり, 自分と同じ研究を発表していたヤコビをみて失神したりと, 才能がありながらもチャンスに恵まれなかった. ついには27歳で病魔に侵されて死んでしまう.

年代が逆になってしまったが, 5次以上の方程式の解の存在については, ガウス (1777-1855) が1799年に「係数が複素数の n 次の代数方程式には複素数の範囲に重複度も含め n 個の解が存在する」ということを証明している. 今日ではこれを代数学の基本定理とよんでいる. しかしながら, 現代数学の観点からすると当時の証明には若干の不備があったようである. 現在では幾通りかの証明が分かっており, 次のように, より一般的に記述されていることが多い.

【代数学の基本定理】　複素数体 C は代数的閉体である.

参考文献

[1] 日本数学会編集, 岩波数学辞典第三版, 東京書籍.

[2] 矢野健太郎, モノグラフ *9* 数学史, 科学新興社.

[3] 吉永良正, 数学を愛した人たち, 東京出版.

[4] 森田康夫, 代数概論, 裳華房.