高校入試問題 模擬テスト

数 学

中学3年生向け

TYPE-2

模擬テスト番号：0203101
試験時間：60 分

解答と解説

【出 題 範 囲】

1年生						2年生						3年生					
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●			
正負の数	文字と式	一次方程式	比例と反比例	平面図形	空間図形	式の計算	連立方程式	一次関数	平行と合同	図形の性質	確率	平方根	多項式	二次方程式	二次関数	相似な図形	三平方の定理

理数科への数学

数学指導研究会

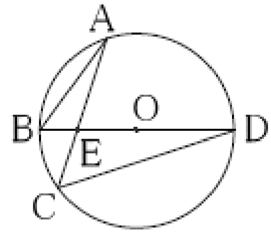
1 次の各問題に答えなさい。

(1) $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2},\ y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ のとき、$x^4y^2+2x^3y^3+x^2y^4$ の値を求めなさい。

(2) $4x^2-y^2-9z^2+6yz$ を因数分解しなさい。

(3) 12kmの道のりを最初の8kmは時速 a kmで、後の4kmは時速 b kmで歩きました。このときの平均時速を a、b で表しなさい。

(4) 右図で点A、B、C、Dは円Oの周上にあり、BDはその直径です。弧DA：弧AB：弧BC＝3：2：1のときにACとBDの交点をEとして、∠AEDの大きさを求めなさい。



(5) 大、中、小のサイコロを同時に1回だけ投げるとき、少なくとも2つの目が同じである確率を求めなさい。

(1) $x^4y^2+2x^3y^3+x^2y^4$

$=x^2y^2\left(x^2+2xy+y^2\right)$

$=x^2y^2\left(x+y\right)^2$

ここで $\begin{cases} x+y=\sqrt{3} \\ xy=\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

よって、(与式)$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\sqrt{3}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

答：$\dfrac{3}{4}$

xとyが根号を含む複雑な値で、値を求める式も次数が高く、このまま代入すると、うまくいきそうにありません。こうしたときは…

1. この問題のように、$x+y$ と xy（たした値とかけた値）が簡単になるようであれば、それらの値を求めます。
2. 値を求める式を変形して（この問題のように因数分解する場合が多い）$x+y$ と xy で表します。
3. $x+y$ と xy の値を式に代入して計算し、答を求めます。

(2) $4x^2-y^2-9z^2+6yz$

$=4x^2-(y^2-6yz+9z^2)$

$=4x^2-\left(y-3z\right)^2$

$=\left(2x+y-3z\right)\left\{2x-\left(y-3z\right)\right\}$

$=\left(2x+y-3z\right)\left(2x-y+3z\right)$

答：$\left(2x+y-3z\right)\left(2x-y+3z\right)$

●因数分解の解法

「置き換え等の工夫をして公式を適用する。」

$2x=X,\ y-3z=Y$ と置き換えることにより、

$X^2-Y^2=\left(X-Y\right)\left(X+Y\right)$

を利用して、因数分解しています。

(3) ・進んだ距離：12km

・かかった時間：$\dfrac{8}{a}+\dfrac{4}{b}$ 〔時間〕

・平均時速：$12\div\left(\dfrac{8}{a}+\dfrac{4}{b}\right)=12\div\left(\dfrac{4a+8b}{ab}\right)=\dfrac{12ab}{4a+8b}$

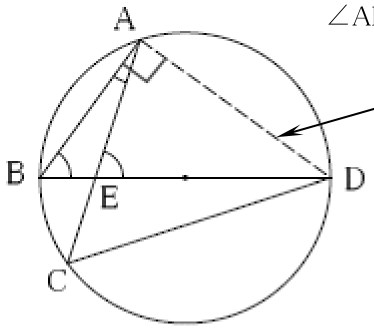
$=\dfrac{3ab}{a+2b}$

※ $\dfrac{a+b}{2}$ としないようにしましょう！

答：$\dfrac{3ab}{a+2b}$ 〔km/時〕

$$(\text{平均速度})=\frac{(\text{進んだ距離})}{(\text{かかった時間})}$$

(4) BD が直径だから ∠BAD＝90°
よって ∠ABD＋∠ADB＝90°
弧DA:弧AB:弧BC＝3:2:1 より



$\angle \mathrm{ABD}=90^\circ\times\frac{3}{5}=54^\circ$

$\angle \mathrm{BAC}=90^\circ\times\frac{1}{5}=18^\circ$

∠AED
$=54^\circ+18^\circ$
$=72^\circ$

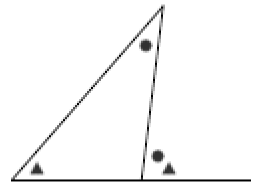
答：72°

(5) 「少なくとも2つの目が同じ数である。」
の余事象は
「3つとも異なる目が出る。」
・3つとも異なる目が出る場合の数
→1～6の6つの数字から3つの数字を選んで並べる
順列の数 $6\times5\times4$ に等しい。
よって、求める確率は

$$1-\frac{6\times5\times4}{6^3}=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

答：$\frac{4}{9}$

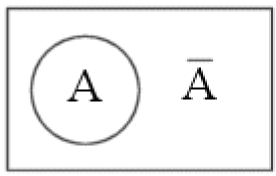
補助線ＡＤを引くことによって、「ＢＤが直径」⇔「∠ＢＡＤが直角」という条件を使うことができます。



三角形の外角はそれと隣り合わない内角の和に等しい。

樹形図を書かなくても、計算で求められるようにしておきましょう。

■ことがら A とその余事象 $\overline{A}$ ■
一般的に A の確率が求めにくいときに、その余事象 $\overline{A}$ を考えてみると容易に求まる場合が多いです。特に「少なくとも」の表現があれば、余事象で考えたほうがわかりやすいでしょう。



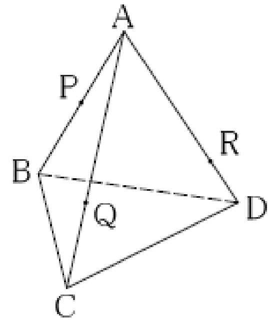
・ $\overline{A}$ の起こる確率： p
・ A の起こる確率：$1-p$

2

次の各問題に答えなさい。

(1)　$a+c:b=5:4$ 、$a+2b=2c$ のときに、$a:b:c$ の値を求めなさい。

(2)　右図の四面体A-BCDで、点Pは辺ABの中点、点Qは辺AC上にあり辺ACを2：1に分ける点、点Rは辺AD上にあり辺ADを3：1に分ける点です。四面体A-BCDを点P、Q、Rを通る面で2つに分けたとき、点Aを含む立体と点Bを含む立体の体積の比を最も簡単な整数で求めなさい。



(3)　ある分数に $\dfrac{35}{12}$ をかけても、$\dfrac{15}{28}$ をかけても整数になりました。このような分数の中で、最も小さいものを求めなさい。

(1) $a+c:b=5:4$

$5b=4(a+c)\rightarrow 5b=4a+4c$　・・・①

$a+2b=2c\rightarrow 2a+4b=4c$　・・・②

②→①：$b=6a\rightarrow a:b=6:1$　・・・③

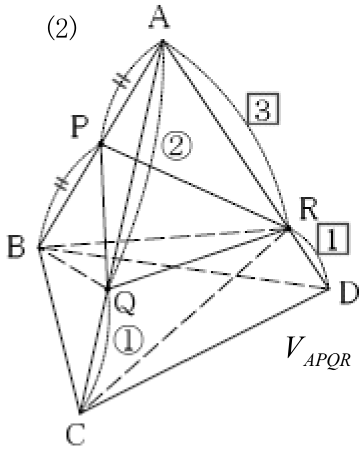
②→$13a=2c\rightarrow a:c=2:13$　・・・④

③,④から　$a:b:c=2:12:13$

$\boxed{\text{答：} a:b:c=2:12:13}$

※一般的に n 個の未知数の値をすべて求めるためには n 個の式が必要ですが、比を求めるだけなら $(n-1)$ 個の式があれば求めることができます。

(2)



三角錐ABCDの面積を1とすると

面積比や体積比を求める問題では、基準となる図形の面積や体積を「1」とおけば考えやすい！

・$V_{ABCR}=\dfrac{3}{4}$

・$V_{ABQR}=V_{ABCR}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}$

・$V_{APQR}=V_{ABQR}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

$V_{APQR}:V_{PQRBCD}=\dfrac{1}{4}:1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}:\dfrac{3}{4}=1:3$

$\boxed{\text{答：}1:3}$

(3)　12,35,28,15 をそれぞれ素因数分解する。

$35=5\times 7$, $12=2^2\times 3$ $\Big\}$ $\dfrac{35}{12}=\dfrac{5\times 7}{2^2\times 3}$

$15=3\times 5$, $28=2^2\times 7$ $\Big\}$ $\dfrac{15}{28}=\dfrac{3\times 5}{2^2\times 7}$

求めるべき、ある分数を $\dfrac{n}{m}$ とおくと

$\dfrac{35}{12}\times\dfrac{n}{m}=\dfrac{5\times 7\times n}{2^2\times 3\times m}$　　$\dfrac{15}{28}\times\dfrac{n}{m}=\dfrac{3\times 5\times n}{2^2\times 7\times m}$

この２つの分数を整数にすることができる最小の n 、最大の m の組み合わせは、$n=2^2\times 3\times 7=84$ 、$m=5$

したがって、ある分数は $\dfrac{n}{m}=\dfrac{84}{5}$

$\boxed{\text{答：}\dfrac{84}{5}}$

・$n=2^2\times 3\times 7=84$ は 12 と 28 の最小公倍数
・$m=5$ は 35 と 15 の最大公約数

3

容器Aにx%の食塩水が400g、容器Bにy%の食塩水が300g、容器Cに4%の食塩水が200g入っています。まず容器Aから容器Bに200g移し、よくかき混ぜ、次に容器Bから容器Cに200g移し、よくかき混ぜたところ、容器Cの食塩水の濃度は5.4%になりました。さらに容器Cから容器Aに200g移してよくかき混ぜたところ、容器Aの食塩水の濃度は6.7%になりました。

次の各問いに答えなさい。

(1) 容器Aから容器Bに200g移して、よくかき混ぜた後の容器Bの食塩水の濃度をx, yで表しなさい。

(2) 容器Cから容器Aに200g移した後、容器Aの食塩水に含まれる食塩の量をx, yで表しなさい。

(3) x, yをそれぞれ求めなさい。

(1) ・AからBへ200g移した後のBの食塩の量

$$300\times\frac{y}{100}+200\times\frac{x}{100}=2x+3y \text{〔g〕} \quad \leftarrow ※1$$

・このときのBの濃度

$$\frac{2x+3y}{300+200}\times 100=\frac{2x+3y}{5} \quad \text{〔\%〕}$$

答：$\dfrac{2x+3y}{5}$%

(2) ・BからCへ200g移した後のCの食塩の量

$$200\times\frac{4}{100}+200\times\frac{2x+3y}{5}\times\frac{1}{100}=8+\frac{2(2x+3y)}{5} \quad \text{〔g〕}$$

・このときのCの濃度 ↑※2

$$\frac{1}{200+200}\times\left\{8+\frac{2(2x+3y)}{5}\right\}\times 100=2+\frac{2x+3y}{10} \quad \text{〔\%〕}$$

・CからAへ200g移した後のAの食塩の量 ↓※3

$$200\times\frac{x}{100}+200\times\left(2+\frac{2x+3y}{10}\right)\times\frac{1}{100}=2x+4+\frac{2x+3y}{5}$$

$$=\frac{12x+3y+20}{5} \quad \text{〔g〕}$$

答：$\dfrac{12x+3y+20}{5}$g

(3) ・CからAへ200g移した後のAの濃度

$$\frac{1}{400}\times\frac{12x+3y+20}{5}\times 100=\frac{12x+3y+20}{20} \quad \text{〔\%〕}$$

よって、$\dfrac{12x+3y+20}{20}=6.7\rightarrow 12x+3y=114$ ・・・①

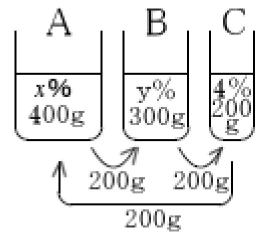
また(2)より、$\dfrac{2x+3y+20}{10}=5.4\rightarrow 2x+3y=34$ ・・・②

①－②：$10x=80\rightarrow x=8$

②$\rightarrow 16+3y=34\rightarrow y=6$

答：$x=8$, $y=6$

複雑な問題は、下記のように図に表すと内容が整理できます！



食塩水の濃度の問題は **「含まれる食塩の量」に着目** して、進めていきます。 ※1～※3

a〔%〕の食塩水b〔g〕に含まれる食塩の量

$$b\times\frac{a}{100} \quad \text{〔g〕}$$