高校入試問題 模擬テスト

数　学

中学３年生向け
TYPE-3

模擬テスト番号：0303101
試験時間：60 分

解答と解説

【出 題 範 囲】

1年生						2年生						3年生					
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●			
正負の数	文字と式	一次方程式	比例と反比例	平面図形	空間図形	式の計算	連立方程式	一次関数	平行と合同	図形の性質	確率	平方根	多項式	二次方程式	二次関数	相似な図形	三平方の定理

理数科への数学

数学指導研究会

1

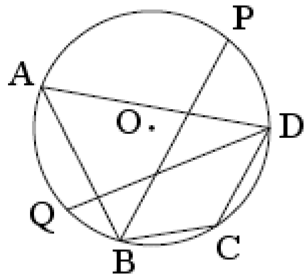
次の各問題に答えなさい。

(1) $x^2-y^2-2z^2-xz+3yz=0$ と $x-2y-3z=0$ が同時に成り立つときに、$\dfrac{3y+4z}{2x-3y}$ の値をすべて求めなさい。

(2) Nは正の整数 1～30 をかけたものです。($N=1\times2\times3\times\cdot\cdot\cdot\times29\times30$)

$\dfrac{N}{3^k}$ が整数となる最大の整数 kを求めなさい。

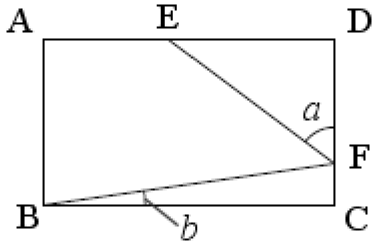
(3) 右図で四角形ABCDは円Oに内接しています。∠Bの二等分線と円周の交点をP、∠Dの二等分線と円周の交点をQとすると、円の中心Oと点P、Qは一直線上にあることを証明しなさい。



(4) xとy の関数 $y=ax$ と $y=\dfrac{b}{x}$ で、xの変域が$1\leqq x\leqq4$のときに、2つの関数の共通するyの変域が$3\leqq y\leqq5$となるa,bの組をすべて求めなさい。

(5) $\sqrt{12m}=\sqrt{8n}$ の値が正の整数となる整数 m,n の組で、$m+n<1000$を満たすものは、何組ありますか。

(6) 右図の四角形ABCDはAB＝4 ㎝、AD＝7㎝の長方形です。DE＝4㎝、DF＝3㎝となるように点D、点Fをそれぞれ辺AD、DC上にとり、$\angle EFD=\angle a$、$\angle FBC=\angle b$とします。このとき、$\angle a-\angle b$ の値を求めなさい。



(1) $x^2-y^2-2z^2-xz+3yz=0$ の左辺を因数分解する。

$x^2-zx-(y^2-3zy+2z^2)=0$

１つの文字（x）について整理！

$x^2-zx-(y-2z)(y-z)=0$

$x^2-zx+(y-2z)(-y+z)=0$

$(x+y-2z)(x-y+z)=0$

ⅰ) $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-2y-3z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x:y:z=7:-1:3$

よって $x=7t, y=-t, z=3t$ とおくことができる。

$\therefore \dfrac{3y+4z}{2x-3y}=\dfrac{-3t+12t}{14t+3t}=\dfrac{9t}{17t}=\dfrac{9}{17}$

ⅱ) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x-2y-3z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x:y:z=5:4:-1 \rightarrow x=5t, y=4t, z=-t$

$\therefore \dfrac{3y+4z}{2x-3y}=\dfrac{12t-4t}{10t-12t}=\dfrac{8t}{-2t}=-4$

ⅰ)、ⅱ)より $\dfrac{9}{17}, -4$

答：$\dfrac{9}{17}, -4$

A×B＝0
⇕
「A＝0 または B＝0」

$\begin{cases} x^2-y^2-2z^2-xz+3yz=0 \\ \text{かつ} \\ x-2y-3z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y-2z)(x-y+z)=0 \\ \text{かつ} \\ x-2y-3z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 「x+y-2z=0 \\ \qquad \text{または}\, x-y+z=0」 \\ \text{かつ} \\ x-2y-3z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+y-2z=0 \\ \text{かつ} \\ x-2y-3z=0 \end{cases} \\ \text{または} \\ \begin{cases} x-y+z=0 \\ \text{かつ} \\ x-2y-3z=0 \end{cases} \end{cases}$

(2) 1～30 の正の整数で、$3, 3^2, 3^3$ を<u>素因数</u>として持つ数を分類して考える。

● 「素因数」・・・素数である因数

ⅰ) 3 を素因数として持つ数

3, 6, $\boxed{9}$, 12, 15, $\boxed{18}$, 21, 24, $\boxed{27}$, 30 ・・・10 個

ⅱ) 3^2 を素因数として持つ数

9, 18, $\boxed{27}$ ・・・3 個

ⅲ) 3^3 を素因数として持つ数

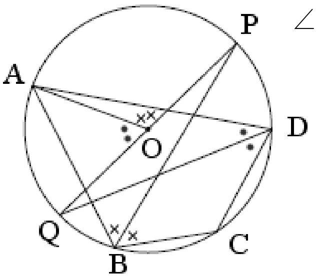
27 ・・・1 個

上記の中で 4 個の数は重複していることに注意をして考えると、Nは 3 を素因数として 10+3+1＝14 個持っている。

よって、$\dfrac{N}{3^k}$ が整数になることができる最大の k は、

k＝14　　　答：k＝14

(3) 四角形ＡＢＣＤは１つの円に内接しているので、



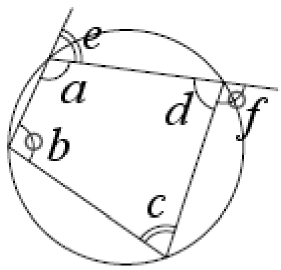
$\angle ABC + \angle ADC = 180°$

$\angle ADQ + \angle ABP$

$= \dfrac{1}{2}\left(\angle ABC + \angle ADC\right)$

$= \dfrac{1}{2} \times 180° = 90°$ ・・・①

円に内接する四角形の性質



- 対角の和は 180° である。
  $\angle a + \angle c = \angle b + \angle d = 180°$
- 外角は、それと隣り合う内角の対角に等しい。
  $\angle b = \angle f, \quad \angle c = \angle e$

円周角と中心角との関係より

$\angle AOQ + \angle AOP = 2\left(\angle ADQ + \angle ABP\right)$

$= 2 \times 90° = 180°$

したがって、３点 P, O, Q は同一直線上にある。

(4) 2 つの変域 $1 \leqq x \leqq 4$ 、$3 \leqq y \leqq 5$ から

$y = ax$ 、$y = \dfrac{b}{x}$ において、$a > 0, b > 0$ が必要。

・ $y = ax$ は右上がりのグラフだが、2 点 (1,3) ,(4,5) を同時に通ることはない。

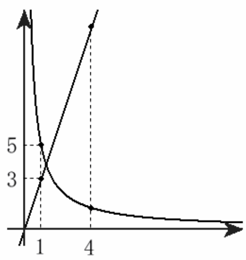
● (x , y) = (1,3) ,(4,5) を同時に満たす a は存在しません。

・ $y = \dfrac{b}{x}$ は $x > 0$ で右下がりのグラフだが、2 点 (1,5) ,(4,3) を同時に通ることはない。

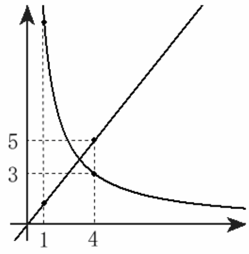
● (x , y) = (1,5) ,(4,3) を同時に満たす b は存在しません。

したがって、下記の 2 通りが考えられる。

(Ⅰ)



(Ⅱ)



（Ⅰ）の場合

$y=ax$ が（1,3）を通る。→$a=3$

$y=\dfrac{b}{x}$ が（1,5）を通る。→$b=5$

（Ⅱ）の場合

$y=ax$ が（4,5）を通る。→$a=\dfrac{5}{4}$

$y=\dfrac{b}{x}$ が（4,3）を通る。→$b=12$

答：$(a,b)=(3,5),\left(\dfrac{5}{4},12\right)$

(5) $\sqrt{12m}=\sqrt{8n}\Leftrightarrow 2\sqrt{3m}=2\sqrt{2n}\Leftrightarrow\sqrt{3m}=\sqrt{2n}$

$\sqrt{3m}=\sqrt{2n}$ の値が正の整数になり、かつ、等式が成立するためには、平方根の中が a を正の整数として、$3^2\times2^2\times a^2$ でなければならない。

$$\begin{cases} m=2^2\times3\times a^2=12a^2 \\ n=2\times3^2\times a^2=18a^2 \end{cases}$$

$m+n<1000\Leftrightarrow 12a^2+18a^2<1000\Leftrightarrow 30a^2<1000$

$\Leftrightarrow a^2<\dfrac{100}{3}=33\dfrac{1}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} 5^2=25<33\dfrac{1}{3} \\ 6^2=36>33\dfrac{1}{3} \end{array}\right\}$$

$a=1,2,3,4,5\cdots$5 通り

したがって、(m,n) の組も 5 組

答：5 組

● 根号が外せて、かつ、等式が成立することが条件です！

(6) △ＡＢＥと△ＤＥＦについて

ＡＢ＝ＤＥ＝4㎝

ＡＥ＝ＤＦ＝3㎝

∠ＢＡＤ＝∠ＥＤＦ＝90°

2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

△ＡＢＥ≡△ＤＥＦ･･･①

∴∠ＥＦＤ＝∠ＢＥＡ

またＡＤ　ＢＣより　∠ＢＥＡ＝∠ＥＢＣ

よって∠ＥＦＤ＝∠ＥＢＣ＝∠a

また①よりＥＢ＝ＥＦ･･･②

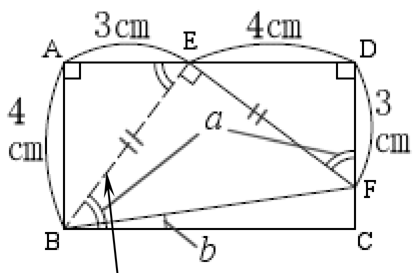
∠ＤＥＦ＋∠ＡＥＢ＝90°

よって∠ＢＥＦ＝90°･･･③

②、③より△ＢＥＦは直角二等辺三角形

∴∠ＥＢＦ＝$\angle a-\angle b=45^\circ$

答：$\angle a-\angle b=45^\circ$



● 有効な「補助線」を引くことが解決への大きな糸口です！

2

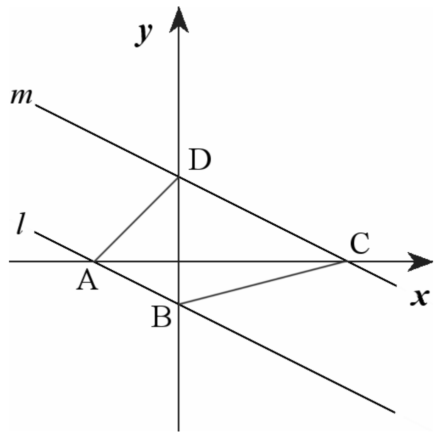
右図でlは$y=-\frac{1}{2}x-1$、mは$y=-\frac{1}{2}x+2$の直線であり、lとx軸、y軸との交点をそれぞれA、Bとし、mとx軸、y軸との交点をそれぞれC、Dとします。

次の問いに答えなさい。

(1)　四角形ABCDの面積を求めなさい。

(2)　$y=ax+2$が、四角形ABCDの面積を二等分するとき、aの値を求めなさい。

(3)　$y=x+k$が、四角形ABCDの面積を二等分するとき、kの値を求めなさい。



(1)　右図でAC＝6、DB＝3

$\therefore S=\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$

答：9

(2)　△ADBの面積をS_1とする。$S_1=\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$

また、$\frac{S}{2}-S_1=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$

直線$y=ax+2$とＢＣの交点をＥ

△ＤＢＥの面積をS_2とすると、$S_2=\frac{3}{2}$となればよい。

△ＤＢＥの底辺をＤＢとして高さをhとおくと

$\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\times 3\times h \rightarrow h=1$　　←これがＥのx座標

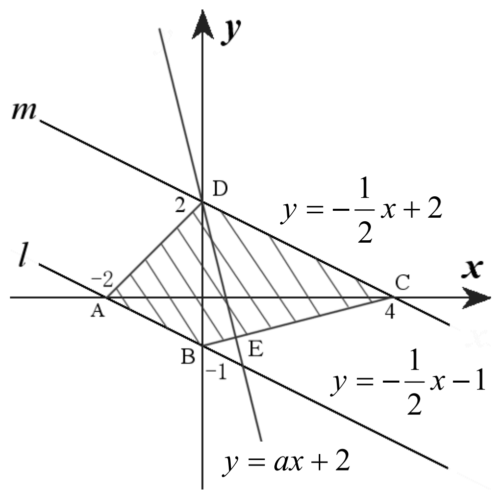
ここで、直線ＢＣの式：$y=\frac{1}{4}x-1$

Ｅのy座標を求める。$y=\frac{1}{4}\times 1-1=-\frac{3}{4}$

$E\left(1,\ -\frac{3}{4}\right)$これを$y=ax+2$に代入

$-\frac{3}{4}=a+2 \rightarrow a=-\frac{11}{4}$

答：$a=-\frac{11}{4}$



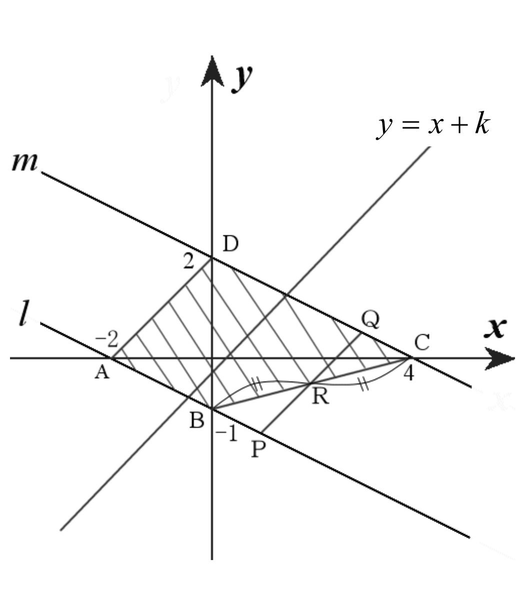
面積の検討をすべき図形（この問題では四角形ＡＢＣＤ）を、△ＡＤＢや△ＤＢＥのように、底辺や高さがわかりやすい三角形に分割して考えます！

(3)　直線ＡＤの傾きは１だから、$y=x+k$とＡＤは平行。
ＢＣの中点Ｒを通りＡＤに平行な直線を引き
l、mとの交点をＰ、Ｑとすると、ＡＢ　ＤＣだから
四角形ＡＰＱＤは四角形ABCDと面積が等しい平行四辺形となる。(∵△BRP≡△CRQ)
２点、B(0,−1)、C(4,0)の中点Rの座標を求める。

$\frac{0+4}{2}=2,\ \frac{-1+0}{2}=-\frac{1}{2} \rightarrow R\left(2,\ -\frac{1}{2}\right)$

直線ＰＱは傾き１でＲを通るので

直線ＰＱの式：$y=x-\frac{5}{2}$



l と直線ＰＱの交点がＰだから、

$$-\frac{1}{2}x-1=x-\frac{5}{2} \quad \to \quad x=1 \quad \therefore P\left(1,\ -\frac{3}{2}\right)$$

A$(-2,0)$だから、ＡＰの中点の座標は

$$\left(\frac{1-2}{2},\frac{-\frac{3}{2}+0}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$$ この点を、$y=x+k$ が通ればよい。

$$-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}+k \quad \to \quad k=-\frac{1}{4}$$

$\boxed{答：k=-\frac{1}{4}}$

２点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ の中点の座標

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

※　この式は、座標値の正負に関わらず、そのまま使えま

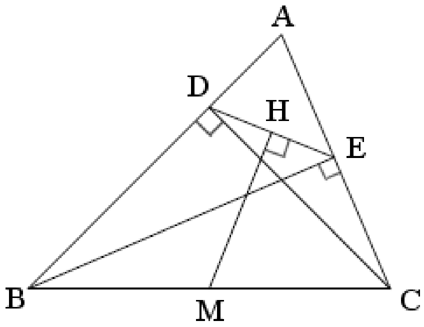
3 鋭角三角形ABCにおいて、頂点Bから辺ACに垂線BEを引き、頂点Cから辺ABに垂線CDを引きます。また辺BCの中点Mから直線DEに垂線MHを引きます。

次の問いに答えなさい。

(1)　$\angle EBC=\angle b, \angle DCB=\angle c$ とするとき、

$\angle b+\angle c=\angle A$ が成り立つことを証明しなさい。

(2)　DH＝HEが成り立つことを証明しなさい。



(1)　DC、BEの交点をFとすると△FBCにおいて

$\angle b+\angle c=\angle DFB$　・・・①

△DBFにおいて

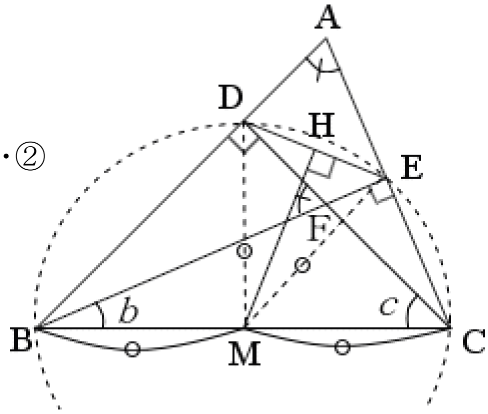
$\angle DFB=180°-90°-\angle DBF=90°-\angle DBF$　・・・②

△EBAにおいて

$\angle A=180°-90°-\angle DBF=90°-\angle DBF$　・・・③

②、③より　$\angle A=\angle DFB$　・・・④

①、④より　$\angle b+\angle c=\angle A$　が成立する。



(2)　仮定より　$\angle BDC=\angle BEC=90°$

したがって、４点D、B、C、Eは線分BCを直径とする円Oの周上にある。

またBCの中点がMだから、Mは円Oの中心である。

よって　MD＝ME＝（円Oの半径）・・・⑤

２つの直角三角形、△DMHと△EMHにおいて

MHは共通　・・・⑥

⑤、⑥より「斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい」ので

△DMH≡△EMH

したがって　DH＝HE　が成立する。

- 直角三角形ABCは斜辺ＡＢを直径とする円に内接する。
- 直角三角形ABCの斜辺ＡＢの中点Mは外接円の中心である。